

# INTÉGRATION SYMPLECTIQUE DES VARIÉTÉS DE POISSON RÉGULIÈRES

F. ALCALDE CUESTA\*et G. HECTOR

## Abstract

A **symplectic integration** of a Poisson manifold  $(M, \Lambda)$  is a symplectic groupoid  $(\Gamma, \eta)$  which **realizes** the given Poisson manifold, i.e. such that the space of units  $\Gamma_0$  with the induced Poisson structure  $\Lambda_0$  is isomorphic to  $(M, \Lambda)$ . This notion was introduced by A. Weinstein in [28] in order to quantize Poisson manifolds by quantizing their symplectic integration. Any Poisson manifold can be integrated by a **local** symplectic groupoid ([4], [13]) but already for regular Poisson manifolds there are obstructions to global integrability ([2], [6], [11], [17], [28]).

The aim of this paper is to summarize all the known obstructions and present a sufficient topological condition for integrability of regular Poisson manifolds; we will indeed describe a concrete procedure for this integration. Further our criterion will provide necessary and sufficient if we require  $\Gamma$  to be Hausdorff, which is a suitable condition to proceed to Weinstein's program of quantization. These integrability results may be interpreted as an generalization of the Cartan-Smith proof of Lie's third theorem in the infinite dimensional case.

## 1 Introduction

Un **groupoïde symplectique**  $(\Gamma, \eta)$  est un groupoïde de Lie muni d'une structure symplectique  $\eta$  compatible avec la multiplication partielle ([4], [13], [28]). L'espace des unités  $\Gamma_0$  est muni d'une structure de Poisson canonique  $\Lambda_0$  pour laquelle la projection source  $\alpha$  est un morphisme de Poisson. Le problème de l'**intégration symplectique** d'une variété de Poisson  $(M, \Lambda)$  a été posé par A. Weinstein dans [28]; il consiste à construire un groupoïde symplectique  $(\Gamma, \eta)$  dont l'espace des unités  $(\Gamma_0, \Lambda_0)$  est isomorphe à  $(M, \Lambda)$ . Quitte à déployer  $\Gamma$  (voir [20]), on peut supposer que les fibres de  $\alpha$  sont connexes et simplement connexes; une telle intégration symplectique est dite **universelle**. L'idée de A. Weinstein est d'utiliser l'intégration symplectique pour quantifier les variétés de Poisson (voir [28], [30], [31]).

---

\*Recherche supportée par D.G.I.C.Y.T. Espagne (Proyecto PB90-0765) et Xunta de Galicia (Proxecto XUGA20704B90)

L'intégration par un groupoïde symplectique **local** a été réalisée dans [4] et [13]. Pour l'intégration globale, il est naturel de s'intéresser d'abord aux variétés de Poisson **régulières** (i.e. celles dont le feuilletage caractéristique  $\mathcal{F}$  est régulier) et plus précisément aux variétés de Poisson régulières dont tout cycle évanouissant est trivial. Cette condition situe le problème dans la catégorie des variétés de Poisson séparées ce qui permet des calculs cohomologiques. Dans ce contexte, on a les résultats suivants:

- 1) il existe des variétés de Poisson non intégrables: P. Dazord construit une obstruction à l'intégrabilité de certaines variétés de Poisson dans [5] et [6];
- 2) les variétés de Poisson **totalelement asphériques** (i.e. celles pour lesquelles le  $\pi_2$  des feuilles de  $\mathcal{F}$  est nul) sont intégrables ([7]).

Le premier but de ce travail est d'exhiber une condition topologique suffisante pour intégrer les variétés de Poisson régulières sans cycle évanouissant qui généralise et résume tous les résultats d'intégration connus à ce jour. En fait, on donne une construction explicite de leur intégration symplectique universelle.

Les variétés de Poisson régulières dont l'intégration symplectique est séparée forment une bonne catégorie pour la préquantification proposée par A. Weinstein. Pour ces variétés, on obtient une condition nécessaire et suffisante d'intégration.

La construction de l'intégration s'appuie sur une théorie de **fibres principaux à groupoïde structural** qui remplace l'approche par les **réalisations isotropes de Libermann** due à P. Dazord ([5], [6]). On est donc amené à introduire dans ce contexte les notions familières pour les fibres principaux classiques: **cocycle, connexion, courbure et classe de Chern**. Cela permet d'explicitier l'analogie avec les résultats d'intégrabilité de B. Kostant ([15]), J. M. Souriau ([23]) et A. Weil ([26]). Cette approche amène naturellement à un autre aspect: l'utilisation de techniques cohomologiques pour "intégrer" les invariants cohomologiques de la structure de Poisson.

La partie technique du travail consiste à démontrer un théorème d'annulation pour la cohomologie (à valeurs dans un faisceau) d'une submersion; celui-ci est le coeur de la preuve du théorème d'intégration.

## 1.1 Résultats

D'après [7], une structure de Poisson régulière  $\Lambda$  sur une variété  $M$  est déterminée par le **feuilletage caractéristique**  $\mathcal{F}$  engendré par les champs hamiltoniens  $X_f$  et la **forme feuilletée symplectique** définie par  $\sigma(X_f, X_g) = \{f, g\}$ . C'est ce point de vue **feuilleté** qui va permettre d'introduire les objets essentiels dans la construction de l'intégration symplectique.

Toute sphère tangente à  $\mathcal{F}$  peut être déformée transversalement en une famille continue  $D$  de sphères tangentes (voir §3.2). L'intégration de  $\sigma$  sur ces sphères définit une **fonction d'aire** sur une transversale à  $\mathcal{F}$ . Si cette fonction possède un point critique, on dira que la **déformation transverse**  $D$  est **symplec-**

**tiquement évanouissante**; une telle déformation sera dite **triviale** si la fonction d'aire est constante. Les différentielles des fonctions d'aire engendrent un sous-groupe  $\mathcal{P}(\Lambda)$  du fibré conormal  $\nu^*\mathcal{F}$  appelé le **groupe des périodes sphériques dérivées** (ou simplement le **groupe dérivé**) de  $\Lambda$ .

Comme dans les problèmes de l'intégration des groupes locaux ([25]) et des suites d'Atiyah ([2], [17]) ou dans le problème de la préquantification des variétés symplectiques ([15], [23], [26]), l'intégrabilité des variétés de Poisson sera caractérisée par leurs périodes (sphériques dérivées). Celles-ci doivent être annulées si l'on veut faire disparaître les obstructions cohomologiques à l'intégration. Par conséquent, le groupe quotient  $\mathcal{G}$  du fibré conormal  $\nu^*\mathcal{F}$  par le groupe dérivé  $\mathcal{P}(\Lambda)$  sera l'ingrédient fondamental de l'intégration symplectique. On résumera cette idée en disant que  $\mathcal{G}$  est le **groupe structural** de  $\Lambda$ .

**Théorème 1.1** *Soit  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson régulière. Le groupe structural  $\mathcal{G}$  est un groupe de Lie si et seulement si*  
*i) le groupe dérivé  $\mathcal{P}(\Lambda)$  est un sous-groupe de Lie de  $\nu^*\mathcal{F}$  étalé sur  $M$ , i.e. toute déformation symplectiquement évanouissante est triviale;*  
*ii) le groupe dérivé  $\mathcal{P}(\Lambda)$  est plongé dans  $\nu^*\mathcal{F}$ .*  
*En outre,  $\mathcal{G}$  est séparé si et seulement si  $\mathcal{P}(\Lambda)$  est fermé.*

La condition (i) est l'obstruction à l'intégrabilité mise en lumière par A. Weinstein dans [28]. Les conditions (i) et (ii) impliquent que le groupe dérivé est un **réseau** de  $(M, \Lambda)$  au sens de [5] et [6]; il s'agit de l'obstruction de P. Dazord. En outre, ces deux conditions entraînent que les fibres de  $\mathcal{P}(\Lambda)$  sont fermées discrètes; en restriction aux feuilles de  $\mathcal{F}$ , on retrouve ainsi l'obstruction à l'intégrabilité des algébroïdes de Lie transitifs de R. Almeida et P. Molino ([2]) et K. Mackenzie ([17]). Bref, toutes ces obstructions à l'intégrabilité n'interviennent en fait que pour assurer que le groupe structural  $\mathcal{G}$  est un groupe de Lie.

**Exemples 1.2** (1) Soit  $\mathcal{F}$  le feuilletage horizontal sur  $M = S^2 \times \mathbb{R}$  défini par l'équation  $dt = 0$ . Soit  $v_0$  la forme volume canonique sur  $S^2$ . La forme feuilletée symplectique  $\sigma$  représentée par  $\omega = (1 + t^2)v_0$  définit une structure de Poisson  $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$  sur  $M$ . Le groupe dérivé, qui est engendré par la 1-forme  $2tdt$ , n'est pas un groupe de Lie.

Cet exemple de A. Weinstein (voir [28]) montre que le groupe structural  $\mathcal{G}$  n'est pas en général un groupe de Lie. L'exemple suivant montre que la condition de plongement est aussi essentielle:

(2) La structure de Poisson sur  $S^2 \times \mathbb{R}$  de l'exemple (1) induit une structure de Poisson  $\Lambda$  sur l'ouvert  $M$  obtenu en ôtant le point  $(N, 0)$ , où  $N$  est le pôle nord de  $S^2$ . Il n'y a plus de déformation symplectiquement évanouissante, mais le groupe structural  $\mathcal{G}$  n'est toujours pas un groupe de Lie.

Si le groupe dérivé est plongé dans  $\nu^*\mathcal{F}$  étalé sur  $M$ , alors les fibres sont discrètes, mais ces deux conditions ne sont pas équivalentes d'après l'exemple (2).

Les analogies établies et le procédé de construction de l'intégration symplectique (voir §4) permettent d'interpréter le théorème suivant comme une extension du théorème de Cartan-Smith qui établit le 3ème théorème de Lie (cf. [25]):

**Théorème 1.3** *Soit  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson régulière dont tout cycle évanouissant est trivial. Si*

- i) le groupoïde structural  $\mathcal{G}$  est un groupoïde de Lie,*
- ii) la variété de Poisson  $(M, \Lambda)$  est **transversalement complète**, i.e. il existe un supplémentaire du fibré tangent du feuilletage image réciproque de  $\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{G}$ , alors  $(M, \Lambda)$  est intégrable.*

Si  $\mathcal{G}$  est séparé, la variété de Poisson  $(M, \Lambda)$  est évidemment transversalement complète (voir §3.7). D'autre part, le groupoïde structural d'une variété de Poisson **totalelement asphérique** (i.e. tout cycle évanouissant est trivial et le  $\pi_2$  des feuilles est nul) est isomorphe à  $\nu^* \mathcal{F}$  et l'on retrouve le théorème fondamental de [7]:

**Corollaire 1.4** *Si  $(M, \Lambda)$  est une variété de Poisson régulière totalement asphérique, alors  $(M, \Lambda)$  est intégrable.  $\square$*

Réciproquement, on montre le théorème d'obstruction suivant qui résume les obstructions préalablement établies ([2], [6], [17], [28]) dans le cas général des variétés de Poisson régulières:

**Théorème 1.5** *Si une variété de Poisson régulière  $(M, \Lambda)$  est intégrable, alors le groupoïde structural  $\mathcal{G}$  est un groupoïde de Lie.*

D'après le théorème 1.3, il semble raisonnable d'ajouter une nouvelle obstruction, à savoir la complétion transverse de  $(M, \Lambda)$ . En fait, le procédé de [11] permet de montrer une condition nécessaire proche de la complétion transverse (en élargissant la notion de **cycle évanouissant cohérent** de [11]). Néanmoins, le problème de l'existence ou non d'un supplémentaire invariant reste ouvert.

La quantification d'après A. Weinstein (voir [28] et [31]) amène à s'intéresser aux variétés de Poisson dont l'intégration symplectique est séparée:

**Théorème 1.6** *Une variété de Poisson régulière  $(M, \Lambda)$  est intégrable par un groupoïde symplectique séparé si et seulement si tout cycle évanouissant est trivial et le groupoïde structural  $\mathcal{G}$  est un groupoïde de Lie séparé.  $\square$*

Les conditions d'intégration se simplifient si le **groupoïde d'homotopie**  $\Pi_1(\mathcal{F})$  (voir §2.4) est localement trivial. On remarque que les cycles évanouissants d'un tel feuilletage sont triviaux. La proposition 3.3 permet d'énoncer le résultat suivant:

**Corollaire 1.7** *Une variété de Poisson régulière  $(M, \Lambda)$  à groupoïde d'homotopie localement trivial est intégrable si et seulement si le groupoïde dérivé  $\mathcal{P}(\Lambda)$  est un sous-groupoïde de Lie de  $\nu^*\mathcal{F}$  à fibres fermées discrètes.  $\square$*

**Exemples 1.8** On donne des exemples de structures de Poisson  $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$  dont le groupoïde d'homotopie est localement trivial:

- 1) Si  $\mathcal{F}$  est défini par une action localement libre d'un groupe de Lie  $G$  et puisque  $G$  est asphérique,  $\Lambda$  est intégrable d'après le corollaire 1.4.
- 2) Si  $\mathcal{F}$  est **riemannien complet**,  $\Lambda$  vérifie la condition du corollaire 1.7 d'après [1].
- 3) Une **structure cosymplectique** ([16]) sur une variété  $M$  est la donnée d'une 1-forme fermée  $\theta$  et d'une 2-forme fermée  $\omega$  telles que  $\theta \wedge \omega^k$  soit une forme volume sur  $M$ . Le feuilletage  $\mathcal{F}$  défini par l'équation  $\theta = 0$  et la forme feuilletée  $\sigma$  représentée par  $\omega$  définissent une structure de Poisson  $\Lambda$  sur  $M$ . Si le champ de Reeb  $R$  (défini par  $i_R\theta = 1$  et  $i_R\omega = 0$ ) est complet, le  $\mathbb{R}$ -feuilletage de Lie  $\mathcal{F}$  est complet et donc vérifie la propriété du corollaire 1.7. Puisque le groupoïde dérivé est nul,  $\Lambda$  est intégrable. En fait, puisque  $\omega$  est fermée,  $\Lambda$  est toujours intégrable d'après [7].
- 4) Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage **totalelement géodésible**. En procédant comme dans [1], ce cas se ramène au cas (1) à l'aide du théorème de structure de G. Cairns (voir [18]).

**Exemples 1.9** Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage transversalement orientable de codimension 1 et  $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$  une structure de Poisson sur une variété compacte  $M$  de dimension 3. D'après le théorème de stabilité de Reeb et le théorème de Novikov, il y a trois cas possibles:

- 1)  $\mathcal{F}$  est totalement asphérique et donc  $\Lambda$  est intégrable d'après le corollaire 1.4;
- 2)  $\mathcal{F}$  est la fibration triviale en sphères et  $\Lambda$  est intégrable si la fonction d'aire est constante d'après le corollaire 1.7;
- 3)  $\mathcal{F}$  possède une composante de Reeb qui supporte un cycle évanouissant non trivial et dans ce cas aucune structure de Poisson  $\Lambda$  n'est intégrable d'après [11].

## 2 Variétés de Poisson régulières

Le but de cette section est de rappeler la description des variétés de Poisson régulières en termes de formes feuilletées (voir [7] et [11]).

### 2.1 Formes feuilletées et formes pures

i) Soit  $(M, \mathcal{F})$  une variété feuilletée. Soient  $(\Omega^*(M), d)$  le complexe de De Rham et  $(\Omega^*(M, \mathcal{F}), d)$  le sous-complexe des **formes relatives**, i.e. des formes qui s'annulent sur les feuilles de  $\mathcal{F}$ . Le complexe  $(\Omega^*(\mathcal{F}), d_{\mathcal{F}})$  des **formes feuilletées**

est le complexe quotient et sa cohomologie  $H^*(\mathcal{F})$  est la **cohomologie feuilletée de**  $(M, \mathcal{F})$ .

ii) Le choix d'un supplémentaire  $N\mathcal{F}$  de  $T\mathcal{F}$  permet d'obtenir de bons représentants des formes feuilletées. Soit  $\nu^*\mathcal{F}$  le fibré conormal dont les sections sont les 1-formes relatives. La décomposition  $T^*M = \nu^*\mathcal{F} \oplus T^*\mathcal{F}$  induit une décomposition de  $\Omega^*(M)$  et  $d$  en **formes pures** et **composantes pures**

$$\Omega^r(M) = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}(M) \quad d = d_{0,1} + d_{1,0} + d_{2,-1}$$

iii) Si l'on considère  $\Omega^r(M) = \bigoplus \Omega^{p,q}(M)$  comme un module filtré de degré filtrant  $p$ , on obtient la **suite spectrale de Leray-Serre**

$$E_2^{p,q}(\mathcal{F}) \implies H^{p+q}(M)$$

Puisque le terme  $E_0^{p,q}(\mathcal{F}) = \Omega^{p,q}(M)$  et la différentielle  $d_0$  est induite par  $d_{0,1}$ , on a :

$$E_1^{0,q}(\mathcal{F}) \cong H^q(\mathcal{F})$$

iv) Soit  $L$  est la forme de Liouville sur  $\nu^*\mathcal{F}$ . Les champs  $H$  définis par

$$(2.1.1) \quad i_H L = i_H dL = 0$$

engendrent un feuilletage  $\mathcal{H}$  appelé le **feuilletage relevé de  $\mathcal{F}$** . Le fibré tangent  $T\mathcal{H}$  est le sous-fibré horizontal de la **connexion partielle de Bott** définie par

$$\nabla_X \mu = i_X d\mu$$

pour tout champ  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$  et toute section  $\mu$  de  $\nu^*\mathcal{F}$ . Bref,  $\nu^*\mathcal{F}$  est un fibré vectoriel  **$\mathcal{F}$ -feuilleté** (au sens de [18]) dont les **sections feuilletées** sont les **1-formes basiques**, i.e. les 1-formes  $\mu$  telles que  $i_X \mu = i_X d\mu = 0$  pour tout  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{F})$ .

v) L'espace  $\Omega^q(\mathcal{F}; \nu^*\mathcal{F})$  des **q-formes feuilletées à valeurs dans  $\nu^*\mathcal{F}$**  est l'espace des sections du fibré vectoriel  $(\bigwedge^q T^*\mathcal{F}) \otimes \nu^*\mathcal{F}$ . La différentielle extérieure covariante

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{F}} \omega(X_1, \dots, X_{q+1}) = & \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \nabla_{X_i} \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{q+1}) + \\ & \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{q+1}) \end{aligned}$$

vérifie  $d_{\mathcal{F}}^2 = 0$  car la courbure de  $\nabla$  est nulle. La cohomologie  $H^*(\mathcal{F}; \nu^*\mathcal{F})$  du complexe  $(\Omega^*(\mathcal{F}; \nu^*\mathcal{F}), d_{\mathcal{F}})$  est la **cohomologie feuilletée de  $(M, \mathcal{F})$  à valeurs dans  $\nu^*\mathcal{F}$** . Alors, on a :

$$E_1^{1,q}(\mathcal{F}) \cong H^q(\mathcal{F}; \nu^*\mathcal{F})$$

## 2.2 Formes feuilletées symplectiques

Une forme feuilletée est un élément d'un quotient, mais on vérifie aisément que ses puissances extérieures et son évaluation sur les vecteurs tangents à  $\mathcal{F}$  sont bien définies. Une 2-forme feuilletée  $\sigma \in \Omega^2(\mathcal{F})$  est dite **symplectique** si

i)  $d_{\mathcal{F}}\sigma = 0$

ii)  $\bigwedge^k \sigma$  est non nulle en tout point de  $M$  où  $\dim \mathcal{F} = 2k$ .

Une telle forme feuilletée définit une structure de Poisson  $\Lambda$  sur  $M$  dont le feuilletage caractéristique est  $\mathcal{F}$ .

A la structure de Poisson  $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$ , on associe les deux éléments de la suite spectrale de Leray-Serre définis par

i)  $[\Lambda] = [\omega] \in E_1^{0,2}(\mathcal{F}) = H^2(\mathcal{F})$

ii)  $d_1[\Lambda] = [d_{1,0}\omega] \in E_1^{1,2}(\mathcal{F}) = H^2(\mathcal{F}; \nu^*\mathcal{F})$

où  $\omega$  est un représentant pur de type  $(0, 2)$  de  $\sigma$  et  $d_1$  est la différentielle de la suite spectrale induite par  $d_{1,0}$ . Ce sont des invariants essentiels de  $\Lambda$ .

## 2.3 Algébroïdes de Lie

Une structure de Poisson  $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$  sur une variété  $M$  définit une structure d'**algébroïde de Lie** ([20]) sur le fibré cotangent  $T^*M$  ([4], [13]) donnée par:

i) le morphisme de fibrés vectoriels  $\Lambda^\# : T^*M \rightarrow TM$  qui, à toute 1-forme  $\mu$ , associe le champ  $\Lambda^\#\mu$  tangent à  $\mathcal{F}$  tel que  $i_{\Lambda^\#\mu}\sigma = -\bar{\mu}$ , où  $\bar{\mu}$  est la classe feuilletée de  $\mu$ ;

ii) le crochet de Lie

$$\{\mu_1, \mu_2\} = i_{\Lambda^\#\mu_1}d\mu_2 - i_{\Lambda^\#\mu_2}d\mu_1 + d\Lambda(\mu_1, \mu_2)$$

pour lequel  $\Lambda^\# : \Omega^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  est un morphisme d'algèbres de Lie qui vérifie  $\{\mu_1, f\mu_2\} = f\{\mu_1, \mu_2\} + (L_{\Lambda^\#\mu_1}f)\mu_2$  pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Le noyau du morphisme  $\Lambda^\#$  est le fibré conormal  $\nu^*\mathcal{F}$ . C'est un **algébroïde de Lie vectoriel**, i.e. un fibré en algèbres de Lie abéliennes. De façon précise, on a une **extension** d'algébroïdes de Lie

$$(2.3.2) \quad 0 \rightarrow \nu^*\mathcal{F} \longrightarrow T^*M \xrightarrow{\Lambda^\#} T\mathcal{F} \rightarrow 0$$

L'algébroïde de Lie  $T\mathcal{F}$  agit sur le noyau  $\nu^*\mathcal{F}$  à l'aide de la connexion partielle de Bott. Pour tout couple  $X_1$  et  $X_2$  de champs tangents à  $\mathcal{F}$ , on considère le couple  $\mu_1 = -i_{X_1}\omega$  et  $\mu_2 = -i_{X_2}\omega$  de 1-formes pures de type  $(0, 1)$  pour le choix d'un supplémentaire de  $T\mathcal{F}$ . La 2-forme feuilletée fermée  $\Omega \in \Omega^2(\mathcal{F}; \nu^*\mathcal{F})$  définie par

$$\Omega(X_1, X_2) = -\{\mu_1, \mu_2\}_{1,0} = i_{X_2}i_{X_1}d_{1,0}\omega$$

représente une classe de  $H^2(\mathcal{F}; \nu^* \mathcal{F})$  qui caractérise l'extension:

**Proposition 2.1 ([7])** *L'algébroïde de Lie  $T^*M$  de  $(M, \Lambda)$  est l'extension de  $T\mathcal{F}$  par  $\nu^* \mathcal{F}$  (relative à la connexion partielle de Bott) de classe  $d_1[\Lambda]$ .  $\square$*

## 2.4 Intégration de Poisson

Soit  $(M_0, \mathcal{F}_0)$  une variété feuilletée (où l'on modifie les notations précédentes par l'adjonction d'un indice 0). Le **groupeïde d'homotopie**  $\Pi_1(\mathcal{F}_0)$  ([20]) est le quotient de l'espace des chemins contenus dans les feuilles de  $\mathcal{F}_0$  (muni de la topologie compact-ouvert  $C^\infty$ ) par la relation d'homotopie dans les feuilles de  $\mathcal{F}_0$ . C'est un groupeïde de Lie (voir [19]) dont l'espace total  $M$  est séparé si, et seulement si, tout cycle évanouissant de  $\mathcal{F}_0$  est trivial (voir [7]). Les projections source  $\alpha_0$  et but  $\beta_0$  définissent un même feuilletage image réciproque  $\mathcal{F} = \alpha_0^* \mathcal{F}_0 = \beta_0^* \mathcal{F}_0$  dont les feuilles sont les groupeïdes d'homotopie des feuilles de  $\mathcal{F}_0$ . Ce feuilletage est invariant par l'involution  $\iota_0$  de  $\Pi_1(\mathcal{F}_0)$  et sa trace sur  $M_0$  est égale à  $\mathcal{F}_0$ .

i) Les applications  $\alpha_0, \beta_0, \iota_0$  induisent des morphismes des complexes de formes relatives et de formes feuilletées.

ii) On fixe une décomposition  $TM_0 = N\mathcal{F}_0 \oplus T\mathcal{F}_0$  et l'on note  $p$  la projection sur  $T\mathcal{F}_0$ . Le noyau de l'application

$$(p \times p) \circ (\beta_0, \alpha_0)_*: TM \rightarrow TM_0 \oplus TM_0 \rightarrow T\mathcal{F}_0 \oplus T\mathcal{F}_0$$

est un supplémentaire de  $T\mathcal{F}$ . On dira que ces décompositions de  $TM$  et  $TM_0$  sont **adaptées l'une à l'autre**. Dans des décompositions adaptées, les applications  $\alpha_0, \beta_0, \iota_0$  induisent des morphismes des complexes de formes pures de type  $(p, q)$ .

iii) Soit  $\Omega^*(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$  le complexe des **formes feuilletées relatives** qui s'annulent sur  $M_0$ . En utilisant des décompositions adaptées, on obtient un isomorphisme de  $\Omega^{0,q}(M, M_0)$  dans  $\Omega^q(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$  et une **suite spectrale de Leray-Serre relative**

$$E_2^{p,q}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0) \Rightarrow H^{p+q}(M, M_0)$$

En outre, toute structure de Poisson  $\Lambda_0 = (\mathcal{F}_0, \sigma_0)$  sur  $M_0$  se relève en une structure de Poisson  $\Lambda$  sur  $M$  qui en fait un **groupeïde de Poisson** au sens de [29] (voir [7]). Cette structure de Poisson est déterminée par le feuilletage  $\mathcal{F}$  et la forme feuilletée relative  $\sigma = \alpha_0^* \sigma_0 - \beta_0^* \sigma_0$ .

## 3 Périodes sphériques et groupeïde structural

Le problème de l'intégration symplectique de  $(M, \Lambda)$  consiste à construire un groupeïde symplectique dont l'algébroïde de Lie est isomorphe à l'extension  $T^*M$



de  $T\mathcal{F}$  par  $\nu^*\mathcal{F}$ . Ces deux derniers algébroïdes de Lie sont intégrables. Le fibré conormal  $\nu^*\mathcal{F}$  est un groupoïde de Lie (plus précisément un fibré en groupes) qui est visiblement l'intégration de l'algébroïde de Lie  $\nu^*\mathcal{F}$ . En outre, le groupoïde d'homotopie  $\Pi_1(\mathcal{F})$  réalise l'intégration de  $T\mathcal{F}$ . L'intégrabilité de  $(M, \Lambda)$  sera caractérisée en termes de **périodes sphériques** de la classe  $d_1[\Lambda]$  de l'extension. Leur construction sera le premier but de cette section. On s'intéressera ensuite aux structures différentiable et feuilletée du groupoïde quotient  $\mathcal{G}$  de  $\nu^*\mathcal{F}$  par ces périodes sphériques. C'est dans la construction de ce groupoïde que se retrouveront toutes les difficultés et toutes les obstructions à l'intégrabilité. En particulier, on prouvera le théorème 1.1 au §3.5.

### 3.1 Le groupoïde d'homotopie $\Pi_2(\mathcal{F})$

Soit  $\mathcal{F}$  un feuilletage de dimension  $n$  et de codimension  $m$  sur une variété  $M$ . Soit  $\mathcal{C}^\infty(S^2, \mathcal{F})$  l'espace des applications différentiables de  $S^2$  dans les feuilles de  $\mathcal{F}$  muni de la topologie compact-ouvert  $\mathcal{C}^\infty$ . Si  $N$  désigne le pôle nord de  $S^2$ , la projection  $\hat{p}: s \in \mathcal{C}^\infty(S^2, \mathcal{F}) \mapsto s(N) \in M$  est continue et ouverte. Soit  $\Pi_2(\mathcal{F})$  le quotient de  $\mathcal{C}^\infty(S^2, \mathcal{F})$  par la relation d'homotopie dans les feuilles de  $\mathcal{F}$  relative à  $N$  et  $q: \mathcal{C}^\infty(S^2, \mathcal{F}) \rightarrow \Pi_2(\mathcal{F})$  la projection quotient correspondante. La projection induite  $p: \Pi_2(\mathcal{F}) \rightarrow M$  est aussi continue et ouverte; sa fibre en un point  $x$  est le groupe d'homotopie  $\pi_2(L_x, x)$  de la feuille  $L_x$  passant par  $x$ . Bref,  $\Pi_2(\mathcal{F})$  est un groupoïde (plus précisément un fibré en groupes) topologique appelé le **groupoïde d'homotopie de  $\mathcal{F}$  d'ordre 2**.

### 3.2 Structure différentiable sur $\Pi_2(\mathcal{F})$

Soit  $s: (S^2, N) \rightarrow (M, x)$  une application différentiable dont l'image est contenue dans la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $x$ ; on dira que  $s$  est une **sphère tangente à  $\mathcal{F}$** . Soit  $E$  le fibré vectoriel image réciproque de  $\nu^*\mathcal{F}$  par  $s$ . À l'aide d'une métrique riemannienne, on construit une application différentiable  $D$  d'un voisinage de la section nulle de  $E$  dans  $M$  prolongeant  $s$  et transverse à  $\mathcal{F}$ , qui induit un difféomorphisme de la fibre de  $N$  sur une transversale  $V$  passant par  $x$ . D'après le théorème de stabilité globale de Reeb, le feuilletage image réciproque  $D^*\mathcal{F}$  est trivialisé par la connexion de Bott. Bref,  $s$  se prolonge en une application différentiable  $D: S^2 \times V \rightarrow M$  transverse à  $\mathcal{F}$  telle que le feuilletage image réciproque  $\mathcal{H} = D^*\mathcal{F}$  est le feuilletage horizontal en sphères sur  $S^2 \times V$ . On dira que  $D$  est une **déformation transverse de  $s$** .

Toute déformation transverse  $D$  peut être épaissie en un **tube de sphères tangentes**. Pour cela, soit  $(U; x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$  une carte locale distinguée pour laquelle la transversale  $x_1 = \dots = x_n = 0$  est contenue dans  $V$ . Soient  $\varphi_t^1, \dots, \varphi_t^n$  les flots des champs tangents  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ . L'application différentiable

$T: S^2 \times U \rightarrow M$  définie par

$$T(z, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = \varphi_{x_1}^1 \circ \dots \circ \varphi_{x_n}^n (D(z, y_1, \dots, y_m))$$

prolonge la déformation transverse  $D$ . On dira que  $T$  est un **tube de sphères tangentes**. Tout tube  $T$  définit des applications continues

$$(3.2.1) \quad \begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\hat{\tau}} & \mathcal{C}^\infty(S^2, \mathcal{F}) \\ & \searrow \tau & \downarrow q \\ & & \Pi_2(\mathcal{F}) \end{array}$$

où  $\tau$  est une section de la projection  $p$ . Ces applications  $\tau$  définissent un atlas et donc une structure différentiable sur  $\Pi_2(\mathcal{F})$  pour laquelle  $p$  est un difféomorphisme local. Bref, on a le résultat suivant:

**Proposition 3.1** *Le groupoïde  $\Pi_2(\mathcal{F})$  est un groupoïde de Lie étalé sur  $M$ .  $\square$*

**Exemples 3.2** (1) Soit  $\Pi_2(M)$  le groupoïde d'homotopie d'ordre 2 d'une variété  $M$ . Soient  $V$  un voisinage contractile d'un point  $x_0$  et  $\gamma$  un chemin dans  $V$  d'extrémité  $x_0$ . L'isomorphisme induit  $\gamma_\#: \pi_2(M, x) \rightarrow \pi_2(M, x_0)$  ne dépend que de l'origine  $x$  de  $\gamma$ . Les homéomorphismes

$$[s] \in p^{-1}(V) \mapsto (s(N), \gamma_\#([s])) \in V \times \pi_2(M, x_0)$$

définissent une structure de variété sur  $\Pi_2(M)$  qui en fait un fibré localement trivial de fibre  $\pi_2(M, x_0)$  et de groupe structural  $\pi_1(M, x_0)$ . Evidemment, ce fibré est trivial si  $M$  est **2-simple**, i.e. l'action de  $\pi_1(M, x_0)$  sur  $\pi_2(M, x_0)$  est triviale.

(2) Soient  $\pi: M \rightarrow B$  un fibré localement trivial dont la fibre  $F$  est 2-simple et  $\mathcal{F}$  le feuilletage défini par  $\pi$ . Soit  $\Pi_2(\pi)$  le fibré associé de fibre  $\pi_2(F)$ . Le groupoïde d'homotopie  $\Pi_2(\mathcal{F})$  est le fibré image réciproque de  $\Pi_2(\pi)$  par  $\pi$ .

(3) On a une situation analogue si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage défini par une submersion surjective  $\pi: M \rightarrow B$  à fibres 2-simples. Le groupoïde d'homotopie  $\Pi_2(\mathcal{F})$  est trivial en restriction aux fibres de  $\pi$  et donc définit par projection un groupoïde de Lie  $\Pi_2(\pi)$  étalé sur  $B$ . On dira que  $\Pi_2(\pi)$  est le **groupoïde d'homotopie d'ordre 2 de  $\pi$** .

Les fibres de  $\alpha_0: \Pi_1(\mathcal{F}) \rightarrow M$  sont les revêtements universels des feuilles de  $\mathcal{F}$  de projection  $\beta_0$ . Celle-ci induit donc un isomorphisme  $(\beta_0)_*: \Pi_2(\alpha_0) \rightarrow \Pi_2(\mathcal{F})$ . D'après les exemples (1) et (2) ci-dessus, on a le résultat suivant:

**Proposition 3.3** *Le groupoïde d'homotopie  $\Pi_2(\mathcal{F})$  est localement trivial en restriction à chaque feuille de  $\mathcal{F}$ . Si  $\Pi_1(\mathcal{F})$  est en plus localement trivial, alors il en est de même pour  $\Pi_2(\mathcal{F})$ .  $\square$*

### 3.3 Intégration et périodes

Soient  $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$  une structure de Poisson et  $\Omega \in \Omega^2(\mathcal{F}; \nu^*\mathcal{F})$  un représentant de la classe  $d_1[\Lambda]$ . Soit  $D: S^2 \times V \rightarrow M$  une déformation transverse d'une sphère tangente  $s: (S^2, N) \rightarrow (M, x)$ . On désigne par  $\mathcal{H}$  le feuilletage horizontal en sphères sur  $S^2 \times V$ . La 2-forme feuilletée fermée  $D^*\Omega \in \Omega^2(\mathcal{H}; \nu^*\mathcal{H})$  est représentée par une forme pure  $\delta$  de type  $(1, 2)$  pour la trivialisation canonique de  $T^*(S^2 \times V)$ . L'intégration sur les fibres du fibré trivial  $S^2 \times V$  au-dessus de  $V$  définit une 1-forme

$$\int_D \Omega = \int_{S^2} \delta$$

sur  $V$ . Les propriétés de  $\int$  impliquent que celle-ci est indépendante de la trivialisation de  $T^*(S^2 \times V)$ .

De façon analogue, la 2-forme feuilletée  $\Omega$  s'intègre sur un tube  $T$  prolongeant  $D$  en une 1-forme basique  $\int_T \Omega$  sur l'ouvert distingué correspondant  $U$  qui étend la 1-forme  $\int_D \Omega$  sur la transversale  $V$ .

On considère le morphisme d'intégration

$$I_\Omega: \Pi_2(\mathcal{F}) \rightarrow \nu^*\mathcal{F}$$

qui, à la section  $\tau: U \rightarrow \Pi_2(\mathcal{F})$  définie par un tube  $T$  d'après le diagramme (3.2.1), associe la 1-forme basique  $\int_T \Omega$  sur  $U$ . D'après le théorème de Stokes, c'est un morphisme de groupoïdes de Lie bien défini qui ne dépend que de la classe  $d_1[\Lambda]$  de  $\Omega$ . Son image  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Lambda)$  est un sous-groupoïde algébrique de  $\nu^*\mathcal{F}$  appelé le **groupoïde des périodes sphériques dérivées** de  $\Lambda$ .

**Proposition 3.4** *Le groupoïde dérivé  $\mathcal{P}$  est saturé pour la connexion partielle de Bott sur  $\nu^*\mathcal{F}$ .*

**Démonstration** Puisque les intégrales de  $\Omega$  sur les tubes sont des 1-formes basiques, le groupoïde dérivé  $\mathcal{P}$  est horizontal pour la connexion partielle de Bott. D'après la proposition 3.3,  $\Pi_2(\mathcal{F})$  est localement trivial en restriction aux feuilles de  $\mathcal{F}$  et donc il en est de même pour  $\mathcal{P}$ . D'où la proposition.  $\square$

### 3.4 Structure différentiable sur $\mathcal{P}$

Si  $\mathcal{K}$  désigne le noyau du morphisme d'intégration, on a une suite exacte de groupoïdes topologiques

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \longrightarrow \Pi_2(\mathcal{F}) \xrightarrow{I_\Omega} \mathcal{P} \rightarrow 0$$

où le groupoïde dérivé  $\mathcal{P}$  est muni de la topologie quotient.

L'exemple 1.2.1 suggère la définition suivante: une déformation transverse  $D$  d'une sphère tangente  $s: (S^2, N) \rightarrow (M, x)$  est **symplectiquement évanouissante** si  $\int_D \Omega(x) = 0$ ; une telle déformation est **triviale** si  $\int_D \Omega = 0$ .

**Proposition 3.5** *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- i) le groupoïde  $\mathcal{P}$  est un sous-groupoïde de Lie de  $\nu^*\mathcal{F}$  étalé sur  $M$ ;
- ii) le noyau  $\mathcal{K}$  est un sous-groupoïde de Lie plongé de  $\Pi_2(\mathcal{F})$ ;
- iii) toute déformation symplectiquement évanouissante est triviale.

**Démonstration** On montre tout d'abord que les conditions (i) et (ii) sont équivalentes (cf. [12] et [21]). Si  $\mathcal{P}$  est un sous-groupoïde de Lie de  $\nu^*\mathcal{F}$  étalé sur  $M$ , le morphisme d'intégration  $I_\Omega: \Pi_2(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{P}$  est un difféomorphisme local. Son noyau  $\mathcal{K} = I_\Omega^{-1}(M)$  est donc un sous-groupoïde de Lie plongé de  $\Pi_2(\mathcal{F})$ .

Réciproquement, soit  $\mathcal{R}$  la relation d'équivalence sur  $\Pi_2(\mathcal{F})$  définie par l'action de  $\mathcal{K}$ , c'est-à-dire l'image réciproque de  $\mathcal{K}$  par l'application différence

$$([s_1], [s_2]) \in \Pi_2(\mathcal{F}) \times_M \Pi_2(\mathcal{F}) \mapsto [s_2] - [s_1] \in \Pi_2(\mathcal{F})$$

où  $\Pi_2(\mathcal{F}) \times_M \Pi_2(\mathcal{F})$  est le produit fibré  $\{([s_1], [s_2]): s_1(N) = s_2(N)\}$ . La condition (ii) implique que  $\mathcal{R}$  est une sous-variété plongée de  $\Pi_2(\mathcal{F}) \times_M \Pi_2(\mathcal{F})$ . De plus, la projection sur le premier facteur se restreint en une submersion surjective de  $\mathcal{R}$  sur  $\Pi_2(\mathcal{F})$ . D'après le critère de Godement (voir [22]), le quotient  $\mathcal{P} = \Pi_2(\mathcal{F})/\mathcal{K}$  est muni d'une structure de variété (qui en fait un groupoïde de Lie) pour laquelle la projection  $I_\Omega$  est une submersion surjective. L'inclusion de  $\mathcal{P}$  dans  $\nu^*\mathcal{F}$  est un morphisme injectif de groupoïdes de Lie. Puisque  $\Pi_2(\mathcal{F})$  s'étale sur  $M$ , il en est de même pour  $\mathcal{P}$  qui devient ainsi immergé dans  $\nu^*\mathcal{F}$ . Bref,  $\mathcal{P}$  est un sous-groupoïde de Lie de  $\nu^*\mathcal{F}$  étalé sur  $M$ .

Pour montrer l'équivalence entre (ii) et (iii), on considère une déformation transverse  $D$  d'une sphère tangente  $s$ . Un tube  $T$  qui prolonge  $D$  définit un voisinage  $W = \tau(U)$  de  $[s]$  difféomorphe à l'ouvert distingué  $U$  associé à  $T$ . L'équivalence est une conséquence immédiate des remarques suivantes:

- 1) la classe  $[s] \in \mathcal{K}$  si et seulement si la déformation  $D$  est symplectiquement évanouissante;
- 2) le voisinage  $W$  de  $[s]$  est contenu dans  $\mathcal{K}$  si et seulement si l'intégrale  $\int_T \Omega$  est nulle. Or cette 1-forme basique est nulle si et seulement si  $\int_D \Omega = 0$ .  $\square$

### 3.5 Groupoïde structural: structure différentiable

Soit  $\mathcal{P}$  le groupoïde des périodes sphériques dérivées de  $\Lambda$ . On considère la suite exacte de groupoïdes topologiques

$$(3.5.2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \nu^*\mathcal{F} \xrightarrow{q} \mathcal{G} \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{G}$  est le groupoïde quotient  $\nu^*\mathcal{F}/\mathcal{P}$ . On dira que  $\mathcal{G}$  est le **groupoïde structural** de la variété de Poisson  $(M, \Lambda)$ . En procédant comme dans la preuve de la proposition 3.5, on démontre le théorème 1.1, à savoir que  $\mathcal{G}$  est un groupoïde de Lie si et seulement si le groupoïde dérivé  $\mathcal{P}$  est un sous-groupoïde de Lie plongé de  $\nu^*\mathcal{F}$  étalé sur  $M$ .

### 3.6 Groupoïde structural: structure feuilletée

On supposera désormais que  $\mathcal{G}$  est un groupoïde de Lie. Soient  $L$  la forme de Liouville sur le fibré conormal  $p: \nu^*\mathcal{F} \rightarrow M$  et  $\mathcal{S}$  le feuilletage image réciproque de  $\mathcal{F}$  par  $p$ . La 1-forme feuilletée  $\Phi \in \Omega^1(\mathcal{S}; \nu^*\mathcal{S})$  définie par

$$\Phi(X) = i_X dL$$

sera appelée la **forme de Maurer-Cartan** de  $\nu^*\mathcal{F}$ . Son noyau est le sous-fibré horizontal de la connexion partielle de Bott d'après (2.1.1). Cette forme feuilletée vérifie les propriétés suivantes que l'on déduit aisément de l'écriture locale de la forme de Liouville  $L$ :

- 1)  $\Phi(\mu^*) = p^*\mu$  pour tout champ invariant à gauche  $\mu^*$  associé à une section  $\mu$  de l'algébroïde de Lie  $\nu^*\mathcal{F}$ .
- 2)  $\Phi$  est **invariante à gauche**, i.e. pour toute 1-forme basique  $\mu$ , on a

$$(L_\mu)^*\Phi = \Phi$$

où  $L_\mu$  est la **translation à gauche** pour la structure de groupoïde sur  $\nu^*\mathcal{F}$ ;

- 3)  $d_S\Phi = 0$ .

La forme de Maurer-Cartan vérifie en fait la propriété d'invariance suivante: pour toute section  $\mu$  de  $\nu^*\mathcal{F}$ , on a

$$(3.6.3) \quad (L_\mu)^*\Phi - \Phi = p^*d_{\mathcal{F}}\mu$$

et donc

$$(3.6.4) \quad \mu^*\Phi = d_{\mathcal{F}}\mu$$

Puisque  $\mathcal{P}$  est horizontal pour la connexion partielle de Bott, tous les objets précédents sont projetables par  $q: \nu^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  et définissent des objets analogues sur  $\mathcal{G}$ . On dira que le groupoïde de Lie abélien  $\mathcal{G}$  est  **$\mathcal{F}$ -feuilleté**.

### 3.7 Complétion transverse

On désigne encore par  $\mathcal{S}$  le feuilletage image réciproque de  $\mathcal{F}$  par la projection  $p: \mathcal{G} \rightarrow M$ . Si le groupoïde structural  $\mathcal{G}$  est séparé, on peut toujours construire un supplémentaire  $N\mathcal{S}$  de  $T\mathcal{S}$  à l'aide d'une métrique riemannienne. Si  $\mathcal{G}$  n'est pas séparé, il n'existe pas en général de supplémentaire de  $T\mathcal{S}$ . Cela justifie la définition suivante: on dira que la variété de Poisson  $(M, \Lambda)$  est **transversalement complète** si le groupoïde structural  $\mathcal{G}$  (resp. le groupoïde dérivé  $\mathcal{P}$ ) possède un supplémentaire  $N\mathcal{S}$  de  $T\mathcal{S}$  (resp. invariant par l'action de  $\mathcal{P}$ ).

**Exemples 3.6** (1) Soit  $\mathcal{F}$  le feuilletage de  $M = S^2 \times \mathbb{R} - \{(N, 0)\}$  défini par l'équation  $dt = 0$ . En multipliant la forme volume canonique  $v_0$  de  $S^2$  par une

fonction positive convenable, on peut obtenir une forme volume des feuilles  $\omega$  dont la fonction d'aire  $\int_{S^2} \omega \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} - \{0\})$  tend vers  $+\infty$  quand  $t$  tend vers 0. Soit  $\sigma$  la forme feuilletée représentée par  $\omega$ . Le groupoïde dérivé de la structure de Poisson  $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$  est engendré par la période

$$\int_{S^2} d_{0,1}\omega = d\left(\int_{S^2} \omega\right) \in \Omega^1(\mathbb{R} - \{0\})$$

C'est un sous-groupoïde de Lie fermé de  $\nu^*\mathcal{F}$ .

(2) Si l'on remplace la 2-forme  $\omega$  de l'exemple (1) par la 2-forme  $e^t v_0$ , le groupoïde dérivé n'est plus fermé, mais le supplémentaire de  $T\mathcal{S}$  engendré par le champ  $\frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r}$  est invariant par l'action de  $\mathcal{P}$ .

Ces deux variétés de Poisson sont intégrables d'après le théorème 1.3. On exhibe enfin un exemple de variété de Poisson qui n'est pas transversalement complète:

(3) Soit  $M$  le complémentaire dans  $S^2 \times S^2 \times \mathbb{R}$  de la réunion des deux ensembles  $S^2 \times \{N\} \times ]-\infty, 0]$  et  $\{N\} \times S^2 \times [0, +\infty[$ . Le feuilletage en produit de sphères induit un feuilletage  $\mathcal{F}$  défini par une submersion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ . Soient  $p_1$  et  $p_2$  les projections de  $S^2 \times S^2$  sur chacun des facteurs. La forme feuilletée symplectique  $\sigma$  représentée par  $e^{-t} p_1^* v_0 + e^t p_2^* v_0$  définit une structure de Poisson  $\Lambda$  sur  $M$ . Le groupoïde dérivé  $\mathcal{P}$  est engendré par la 1-forme  $e^{-t} dt$  au-dessus de  $M_- = f^{-1}(]-\infty, 0])$  et par la 1-forme  $me^t dt$  au-dessus de  $M_+ = f^{-1}([0, +\infty[)$ . La forme conormale  $dt$  en tout point de la feuille  $f^{-1}(0)$  est simultanément adhérente aux nappes de périodes définies par  $e^{-t} dt$  au-dessus de  $M_-$  et  $e^t dt$  au-dessus de  $M_+$ . L'invariance d'un supplémentaire  $N\mathcal{S}$  par l'action de ces deux nappes entraînerait que le champ vertical  $\frac{\partial}{\partial r}$  est normal en restriction à  $f^{-1}(0)$  ce qui n'est évidemment pas possible.

### 3.8 Groupoïde structural de l'intégration de Poisson

Soient  $\Lambda_0 = (\mathcal{F}_0, \sigma_0)$  une structure de Poisson sur une variété  $M_0$  et  $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$  la structure de Poisson relevée sur  $M = \Pi_1(\mathcal{F}_0)$ . Le fibré conormal  $\nu^*\mathcal{F}$  est le fibré vectoriel image réciproque du fibré conormal  $\nu^*\mathcal{F}_0$  par  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ . On se propose de montrer qu'il en est de même pour les groupoïdes structuraux  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}_0$  de  $\Lambda$  et  $\Lambda_0$ . Pour cela, il suffit de démontrer le lemme suivant:

**Lemme 3.7** *Le groupoïde dérivé  $\mathcal{P}$  de  $\Lambda$  est l'image réciproque du groupoïde dérivé  $\mathcal{P}_0$  de  $\Lambda_0$  par  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ .*

**Démonstration** Si  $\Omega_0$  est un représentant de la classe  $d_1[\Lambda_0]$ , alors la classe  $d_1[\Lambda]$  est représentée par  $\Omega = \alpha_0^* \Omega_0 - \beta_0^* \Omega_0$ . Pour toute sphère  $s$  tangente à la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $u \in M_0$ , la période

$$(3.8.5) \quad \int_s \Omega = \alpha_0^* \left( \int_{\alpha_0 \circ s} \Omega_0 \right) - \beta_0^* \left( \int_{\beta_0 \circ s} \Omega_0 \right)$$

D'autre part, toute sphère  $s_0$  tangente à la feuille  $L_0$  de  $\mathcal{F}_0$  passant par  $u$  se relève par  $\beta_0$  en une sphère  $s$  tangente au revêtement universel  $\alpha_0^{-1}(u)$  de  $L_0$ . Leurs périodes sphériques sont reliées par

$$(3.8.6) \quad \int_s \Omega = -\beta_0^* \left( \int_{s_0} \Omega_0 \right)$$

D'après (3.8.5) et (3.8.6),  $\mathcal{P}_0$  est la restriction de  $\mathcal{P}$  à  $M_0$ . Par ailleurs, la connexion partielle de Bott trivialisé  $\mathcal{P}$  en restriction aux fibres de  $\alpha_0$  et de  $\beta_0$  car celles-ci sont simplement connexes. D'où le résultat.  $\square$

**Proposition 3.8** *Le groupoïde structural  $p: \mathcal{G} \rightarrow M$  de  $\Lambda$  est l'image réciproque du groupoïde structural  $p_0: \mathcal{G}_0 \rightarrow M_0$  de  $\Lambda_0$  par  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ . En outre, si  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_0$  sont les feuilletages image réciproque de  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}_0$  par  $p$  et  $p_0$ , alors la forme de Maurer-Cartan  $\Phi \in \Omega^1(\mathcal{S}; \nu^* \mathcal{S})$  de  $\mathcal{G}$  est l'image réciproque de la forme de Maurer-Cartan  $\Phi_0 \in \Omega^1(\mathcal{S}_0; \nu^* \mathcal{S}_0)$  de  $\mathcal{G}_0$  par  $\alpha_0$  et  $\beta_0$ .  $\square$*

## 4 Intégration symplectique

Soit  $\Lambda_0 = (\mathcal{F}_0, \sigma_0)$  une structure de Poisson sur une variété  $M_0$ . Dans cette section, on va démontrer le théorème 1.3. On rappelle son énoncé: si

- $H_1)$  tout cycle évanouissant de  $\mathcal{F}_0$  est trivial,
  - $H_2)$  le groupoïde structural  $\mathcal{G}_0$  est un groupoïde de Lie,
  - $H_3)$  la variété de Poisson  $(M_0, \Lambda_0)$  est transversalement complète,
- alors  $(M_0, \Lambda_0)$  est intégrable.

Soit  $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$  la structure de Poisson relevée sur  $M = \Pi_1(\mathcal{F}_0)$ . Intégrer  $(M_0, \Lambda_0)$  va consister à compléter l'intégration de Poisson  $(M, \Lambda)$  en un diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{G}_0, \eta_0) & \xrightarrow{i} & (\Gamma, \eta) & \xrightarrow{\pi} & (M, \Lambda) \\ & \searrow p_0 & \alpha \downarrow \downarrow \beta & \swarrow \alpha_0 \searrow \beta_0 & \\ & & (M_0, \Lambda_0) & & \end{array}$$

où  $(\Gamma, \eta)$  est un groupoïde symplectique,  $(\mathcal{G}_0, \eta_0)$  est un sous-groupoïde de Poisson **présymplectique** (voir [7]) et  $i$  et  $\pi$  sont des morphismes de Poisson.

De façon précise, on cherche à construire une **extension**  $\Gamma$  du groupoïde d'homotopie  $M$  par le groupoïde structural  $\mathcal{G}_0$  qui **intègre** l'extension d'algébroides de Lie (2.3.2). L'hypothèse  $(H_2)$  fournira donc le noyau de l'extension. On remarque que le groupoïde structural  $\mathcal{G}$  de  $(M, \Lambda)$  sera de même un groupoïde

de Lie abélien  $\mathcal{F}$ -feuilleté d'après la proposition 3.8. La démonstration se fera en trois étapes:

1) *Intégration cohomologique*: on montrera que la classe  $d_1[\Lambda] \in H^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0; \nu^*\mathcal{F})$  **s'intègre** en une classe  $\nu \in H^2(M, M_0; \mathcal{P})$ ; celle-ci sera la classe d'un **cocycle sur  $M$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$**  qui est cohomologue à zéro en restriction à  $M_0$ . L'hypothèse  $(H_1)$  (i.e. la séparation de  $M$ ) interviendra dans cette étape.

2) *Intégration différentiable*: cette étape se décomposera en trois niveaux

i) on construira à l'aide du cocycle un **fibré principal**  $\pi: \Gamma \rightarrow M$  **de groupoïde structural**  $\mathcal{G}$  qui sera trivial en restriction à  $M_0$ ;

ii) on construira une **connexion  $\mathcal{F}$ -partielle**  $\Theta$  sur le  $\mathcal{G}$ -fibré principal  $\Gamma$ ;

iii) on montrera que la **courbure**  $\Omega$  de  $\Theta$  représente la classe  $d_1[\Lambda]$  qui deviendra ainsi une vraie **classe de Chern**.

3) *Intégration symplectique*: il y aura encore deux niveaux différents

i) on construira une forme symplectique  $\eta$  telle que  $\pi: (\Gamma, \eta) \rightarrow (M, \Lambda)$  soit un morphisme de Poisson à fibres isotropes. L'hypothèse  $(H_3)$  n'interviendra que pour construire  $\eta$  dans le cas où l'espace total  $\Gamma$  n'est pas séparé.

ii) on montrera que les projections  $\alpha$  et  $\beta$  forment une **paire duale complète** (au sens de [27]) ce qui définira une structure de groupoïde symplectique sur  $\Gamma$  d'après [4].

## 4.1 Intégration cohomologique

Un **cocycle sur  $M$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$**  est un couple  $(\{U_i\}, \{\tau_{ij}\})$  formé d'un recouvrement ouvert  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  et de sections  $\tau_{ij}: U_i \cap U_j \rightarrow \mathcal{G}$  telles que

i)  $\tau_{ii} = 0$  sur  $U_i$ ,

ii)  $\tau_{ij} - \tau_{ik} + \tau_{jk} = 0$  sur  $U_i \cap U_j \cap U_k$ .

Un tel cocycle représente une classe dans le groupe  $H^1(\mathcal{U}; \mathcal{G})$  de cohomologie de  $\mathcal{U}$  à valeurs dans le faisceau  $\mathcal{G}$  des germes de sections de  $\mathcal{G}$ . Cette classe définit par passage à la limite une classe  $\tau$  dans le groupe  $\check{H}^1(M; \mathcal{G})$  de la cohomologie de Čech de  $M$  à valeurs dans le faisceau  $\mathcal{G}$  (voir [9]). De façon générale, cette cohomologie vérifie les propriétés suivantes:

i) Si les cycles évanouissants de  $\mathcal{F}_0$  sont triviaux, la variété  $M$  est séparée et donc la cohomologie de Čech  $\check{H}^*(M; \mathcal{G})$  est isomorphe à la cohomologie  $H^*(M; \mathcal{G})$  de  $M$  à valeurs dans le faisceau  $\mathcal{G}$  (voir [9]).



ii) Pour toute paire  $(M, M_0)$ , on a une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^q(M, M_0; \mathcal{G}) \rightarrow H^q(M; \mathcal{G}) \xrightarrow{\varepsilon_0^*} H^q(M_0; \mathcal{G}_0) \rightarrow \dots$$

et puisque les applications induites par  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  sont des sections de  $\varepsilon_0^*$ , celle-ci se décompose en suites exactes courtes:

$$(4.1.1) \quad 0 \rightarrow H^q(M, M_0; \mathcal{G}) \rightarrow H^q(M; \mathcal{G}) \rightarrow H^q(M_0; \mathcal{G}_0) \rightarrow 0$$

iii) La suite exacte de groupoïdes de Lie (3.5.2) induit une suite exacte de faisceaux  $0 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}^* \mathcal{F} \xrightarrow{q} \mathcal{G} \rightarrow 0$ . Celle-ci induit une suite exacte longue

$$\dots \rightarrow H^q(M, M_0; \mathcal{P}) \rightarrow H^q(M; \mathcal{V}^* \mathcal{F}) \rightarrow H^q(M, M_0; \mathcal{G}) \rightarrow \dots$$

dont le cobord  $\delta: H^q(M, M_0; \mathcal{G}) \rightarrow H^{q+1}(M, M_0; \mathcal{P})$  est un isomorphisme car le faisceau  $\mathcal{V}^* \mathcal{F}$  des germes de 1-formes relatives est mou (voir [9]).

iv) Soient  $\phi^1$  le faisceau des germes de 1-formes basiques et  $\mathcal{Q}$  le faisceau quotient  $\phi^1/\mathcal{P}$ . La suite exacte de faisceaux  $0 \rightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{j} \phi^1 \xrightarrow{k} \mathcal{Q} \rightarrow 0$  induit une suite exacte longue

$$(4.1.2) \quad \dots \rightarrow H^q(M, M_0; \mathcal{P}) \xrightarrow{j^*} H^q(M, M_0; \phi^1) \xrightarrow{k^*} H^q(M, M_0; \mathcal{Q}) \rightarrow \dots$$

Soit  $F_u$  la fibre de la submersion  $\alpha_0: M \rightarrow M_0$  en un point  $u$  de  $M_0$ . Les inclusions des fibres  $F_u$  dans  $M$  induisent des morphismes de restriction qui rendent commutatif le diagramme suivant:

$$(4.1.3) \quad \begin{array}{ccccc} H^2(M, M_0; \mathcal{P}) & \xrightarrow{j^*} & H^2(M, M_0; \phi^1) & \xrightarrow{k^*} & H^2(M, M_0; \mathcal{Q}) \\ \downarrow \rho_{\mathcal{P}} & & \downarrow \rho_{\phi^1} & & \downarrow \rho_{\mathcal{Q}} \\ \prod H^2(F_u; \mathcal{P}|_{F_u}) & \xrightarrow{\{j_u^*\}} & \prod H^2(F_u; \phi^1|_{F_u}) & \xrightarrow{\{k_u^*\}} & \prod H^2(F_u; \mathcal{Q}|_{F_u}) \end{array}$$

v) D'après [24], on a un isomorphisme  $l^*: H^q(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0; \mathcal{V}^* \mathcal{F}) \rightarrow H^q(M, M_0; \phi^1)$ . En restriction aux fibres  $F_u$ , cet isomorphisme induit des morphismes  $l_u^*$  qui rendent commutatif le diagramme suivant:

$$(4.1.4) \quad \begin{array}{ccc} H^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0; \mathcal{V}^* \mathcal{F}) & \xrightarrow{l^*} & H^2(M, M_0; \phi^1) \\ \rho_{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \rho_{\phi^1} \\ \prod_{u \in M_0} H^2(F_u; \mathcal{V}^* \mathcal{F}|_{F_u}) & \xrightarrow{\{l_u^*\}} & \prod_{u \in M_0} H^2(F_u; \phi^1|_{F_u}) \end{array}$$

On remarque que le groupe  $H^2(F_u; \mathcal{V}^* \mathcal{F}|_{F_u})$  est isomorphe au groupe de cohomologie de De Rham  $H^2(F_u; \mathcal{V}_u^* \mathcal{F}_0) \cong H^2(F_u; \mathbb{R}^m)$ .

vi) Le faisceau restreint  $\mathcal{P}|_{F_u}$  est le faisceau constant dont la fibre est la fibre  $(\mathcal{P}_0)_u \cong \mathbb{Z}^r$  de  $\mathcal{P}_0$  en  $u$ . Donc le groupe  $H^2(F_u; \mathcal{P}|_{F_u})$  est isomorphe au groupe de cohomologie singulière  $H^2(F_u; (\mathcal{P}_0)_u) \cong H^2(F_u; \mathbb{Z}^r)$ . On a la factorisation suivante:

$$(4.1.5) \quad \begin{array}{ccc} H^2(F_u; \mathcal{P}|_{F_u}) & \xrightarrow{j_u^*} & H^2(F_u; \phi^1|_{F_u}) \\ & \searrow h_u^* \quad \nearrow l_u^* & \\ & H^2(F_u; \nu^* \mathcal{F}|_{F_u}) & \end{array}$$

L'hypothèse d'intégrabilité cohomologique est une reformulation du critère d'intégrabilité de P. Dazord ([6]). Le théorème suivant va montrer que ce critère est effectivement vérifié pour les variétés de Poisson considérées:

**Théorème 4.1** *Une variété de Poisson  $(M_0, \Lambda_0)$  qui vérifie les conditions  $(H_1)$  et  $(H_2)$  est cohomologiquement intégrable, i.e. il existe  $\nu \in H^2(M, M_0; \mathcal{P})$  telle que  $j^* \nu = d_1[\Lambda]$ .*

**Démonstration** Soient  $\Omega$  un représentant de la classe  $d_1[\Lambda]$  et  $\Omega_u$  sa restriction à la fibre  $F_u$ . On va montrer que la construction d'un antécédent  $\nu$  de  $d_1[\Lambda]$  se ramène à la construction de classes entières  $\nu_u \in H^2(F_u; \mathcal{P}|_{F_u})$  qui "intègrent" les classes réelles  $[\Omega_u] \in H^2(F_u; \nu^* \mathcal{F}|_{F_u})$ . D'après l'exactitude de la suite (4.1.2), la classe  $d_1[\Lambda]$  se remonte en une classe  $\nu$  si et seulement si la classe projetée  $k^*(d_1[\Lambda])$  est nulle. Si l'on considère le diagramme (4.1.3), on obtient:

$$\rho_{\mathcal{Q}}(k^*(d_1[\Lambda])) = \{k_u^*\}(\rho_{\phi^1}(d_1[\Lambda]))$$

Or, d'après le théorème 6.1 (que l'on prouvera dans §6), le morphisme de restriction

$$\rho_{\mathcal{Q}}: H^2(M, M_0; \mathcal{Q}) \longrightarrow \prod_{u \in M_0} H^2(F_u; \mathcal{Q}|_{F_u})$$

est injectif car les fibres  $F_u$  sont simplement connexes. Il s'ensuit que  $k^*(d_1[\Lambda]) = 0$  si et seulement si la famille de restrictions

$$\rho_{\phi^1}(d_1[\Lambda]) = \{l_u^*[\Omega_u]\} \in \prod_{u \in M_0} H^2(F_u; \phi^1|_{F_u})$$

(voir le diagramme (4.1.4)) se projette par  $\{k_u^*\}$  sur la classe nulle. Pour cela, il faut et il suffit que les classes réelles  $[\Omega_u]$  possèdent des antécédents entiers  $\nu_u$  car

$$j_u^*(\nu_u) = l_u^*(h_u^*(\nu_u)) = l_u^*[\Omega_u]$$

d'après la factorisation (4.1.5).

Enfin, les fibres  $F_u$  étant simplement connexes, l'intégration de  $\Omega$  sur les sphères tangentes aux fibres définit des classes

$$\nu_u \in \text{Hom}(\pi_2(F_u), \mathcal{P}|_{F_u}) = H^2(F_u; \mathcal{P}|_{F_u})$$

telles que  $h_u^*(\nu_u) = [\Omega_u]$ ; d'où le théorème.  $\square$

## 4.2 Intégration différentiable: construction du fibré principal à groupoïde structural

La notion de **fibré principal à groupoïde structural** est due à A. Haefliger ([10]). Soient  $\mathcal{H} \xrightarrow[\beta]{\alpha} \mathcal{H}_0$  un groupoïde de Lie,  $\Gamma$  une variété munie d'une application différentiable  $\rho: \Gamma \rightarrow \mathcal{H}_0$  et

$$\Gamma \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{H} = \{(\gamma, h) \in \Gamma \times \mathcal{H}: \alpha(\gamma) = \rho(h)\}$$

le produit fibré correspondant. Une **action à droite de  $\mathcal{H}$  sur  $\Gamma$**  est une application différentiable  $(\gamma, h) \in \Gamma \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{H} \mapsto \gamma.h \in \Gamma$  vérifiant des propriétés qui généralisent celles de l'action d'un groupe (voir [17]). On dira que l'action est **propre** si l'application  $(\gamma, h) \in \Gamma \times_{\mathcal{H}_0} \mathcal{H} \mapsto (\gamma, \gamma.h) \in \Gamma \times \Gamma$  est propre. De façon concrète, une action libre et propre définit une structure de  $\mathcal{H}$ -fibré principal  $\pi: \Gamma \rightarrow M = \Gamma/\mathcal{H}$ .

On supposera désormais que  $\mathcal{H}$  est le groupoïde structural  $\mathcal{G}$  de  $(M, \Lambda)$  et l'on rappelle que celui-ci est un fibré en groupes abéliens  $\mathcal{F}$ -feuilleté.

Les notions d'**atlas fibré** et **cocycle** s'étendent de façon naturelle au cas des fibrés principaux à groupoïde structural. Ceux-ci sont classifiés par la classe  $\tau \in H^1(M; \mathcal{G})$  d'un cocycle (voir [10]). Un  $\mathcal{G}$ -fibré principal au-dessus de  $M$  est trivial en restriction à  $M_0$  si et seulement si le cocycle induit est cohomologue à zéro. Puisque la suite (4.1.1) est exacte, ce sera le cas si la classe  $\tau$  est relative.

**Proposition 4.2** *L'intégration cohomologique  $\nu \in H^2(M, M_0; \mathcal{P})$  de  $(M_0, \Lambda_0)$  est représentée par un cocycle qui définit un  $\mathcal{G}$ -fibré principal  $\pi: \Gamma \rightarrow M$ . De plus, ce fibré est trivial en restriction à  $M_0$ .*

**Démonstration** La classe  $\tau = \delta^{-1}\nu \in H^1(M, M_0; \mathcal{G})$  est représentée par un cocycle  $(\{U_i\}, \{\tau_{ij}\})$  sur  $M$  à valeurs dans  $\mathcal{G}$ . Soit  $\Gamma$  le quotient de la réunion disjointe  $\coprod \mathcal{G}|_{U_i}$  par la relation d'équivalence qui identifie  $g$  dans  $\mathcal{G}|_{U_j}$  avec  $g + \tau_{ij}(p(g))$  dans  $\mathcal{G}|_{U_i}$ . La projection  $p: \coprod \mathcal{G}|_{U_i} \rightarrow M$  passe au quotient en une submersion surjective  $\pi: \Gamma \rightarrow M$ . La projection  $\psi: \coprod \mathcal{G}|_{U_i} \rightarrow \Gamma$  se restreint en un difféomorphisme  $\mathcal{G}$ -équivariant  $\psi_i$  qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}|_{U_i} & \xrightarrow{\psi_i} & \pi^{-1}(U_i) \\ p \searrow & & \swarrow \pi \\ & U_i & \end{array}$$

Donc son inverse  $\varphi_i$  est une carte de trivialité locale. L'atlas fibré  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  définit une structure de  $\mathcal{G}$ -fibré principal sur  $\Gamma$ . Puisque la classe  $\tau$  est relative, ce fibré est trivial en restriction à  $M_0$  et l'on a le diagramme suivant:

$$(4.2.6) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_0 & \xrightarrow{i} & \Gamma \\ p_0 \downarrow \uparrow s_0 & \nearrow \varepsilon & \downarrow \pi \\ M_0 & \xrightarrow{\varepsilon_0} & M \end{array}$$

où la section nulle  $s_0$  de  $p_0$  définit une section  $\varepsilon$  de  $\pi$  au-dessus de  $M_0$ .  $\square$

On remarquera que pour l'essentiel cette construction correspond à la construction d'une **réalisation isotrope de Libermann** par P. Dazord dans [6].

### 4.3 Intégration différentiable: construction d'une connexion $\mathcal{F}$ -partielle

La projection  $q: \nu^*\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  est l'application exponentielle de l'algébroïde de Lie  $\nu^*\mathcal{F}$  sur  $\mathcal{G}$ . A toute section  $\mu$  de  $\nu^*\mathcal{F}$ , on associe le **champ fondamental**  $\mu^*$  défini par

$$\mu^*_\gamma = \frac{d}{dt}(\gamma \cdot q(t\mu))|_{t=0} \quad , \quad \gamma \in \Gamma$$

Soit  $\mathcal{S}$  le feuilletage image réciproque de  $\mathcal{F}$  par  $\pi$ . Une **1-forme de connexion  $\mathcal{F}$ -partielle** est une 1-forme feuilletée  $\Theta \in \Omega^1(\mathcal{S}; \nu^*\mathcal{S})$  à valeurs dans l'algébroïde de Lie  $\nu^*\mathcal{S}$  qui vérifie les deux conditions suivantes:

- 1)  $\Theta(\mu^*) = \pi^*\mu$  pour toute section  $\mu$  de l'algébroïde de Lie  $\nu^*\mathcal{F}$ .
- 2)  $\Theta$  est  **$\mathcal{G}$ -invariante**, i.e. pour toute section feuilletée  $\hat{\mu}$  de  $\mathcal{G}$ , on a:

$$(R_{\hat{\mu}})^*\Theta = \Theta$$

où  $R_{\hat{\mu}}$  est la **translation à droite** correspondante pour l'action de  $\mathcal{G}$  sur  $\Gamma$ .

**Exemple 4.3** L'action  $(\mu_1, \mu_2) \in \nu^*\mathcal{F} \times_M \nu^*\mathcal{F} \mapsto \mu_1 + \mu_2 \in \nu^*\mathcal{F}$  est libre et propre. Le fibré conormal  $\nu^*\mathcal{F}$  est donc muni d'une structure naturelle de fibré principal de groupoïde structural  $\nu^*\mathcal{F}$ . La connexion partielle de Bott s'interprète (par l'intermédiaire de la forme de Maurer-Cartan  $\Phi$ , voir §3.5) comme une connexion partielle **plate** (voir §4.4).

La donnée de la connexion partielle plate  $\Phi$  sur  $\mathcal{G}$  est essentielle pour l'existence de connexions partielles sur  $\Gamma$ : elle jouera le même rôle que la connexion canonique des trivialisations locales d'un fibré principal classique.

**Proposition 4.4** *Le  $\mathcal{G}$ -fibré principal  $\pi: \Gamma \rightarrow M$  possède une 1-forme de connexion  $\mathcal{F}$ -partielle relative  $\Theta \in \Omega^1(\mathcal{S}, \mathcal{F}_0; \nu^*\mathcal{S})$ .*

**Démonstration** Soit  $\{(U_i, \varphi_i)\}$  un atlas fibré dont le recouvrement sous-jacent est localement fini. Soit  $\{\rho_i\}$  une partition de l'unité subordonnée. La 1-forme feuilletée  $\Theta_i = \varphi_i^* \Phi \in \Omega^1(\mathcal{S}|_{U_i}; \nu^* \mathcal{S}|_{U_i})$  est une 1-forme de connexion partielle sur l'ouvert  $\pi^{-1}(U_i)$ . Alors on vérifie aisément que

$$\Theta = \sum \pi^*(\rho_i) \Theta_i \in \Omega^1(\mathcal{S}; \nu^* \mathcal{S})$$

est une 1-forme de connexion partielle sur  $\Gamma$ .

Il reste à montrer que la 1-forme feuilletée  $\Theta$  est relative, c'est-à-dire que  $\varepsilon^* \Theta = 0$  où  $\varepsilon = i \circ s_0$ , voir le diagramme (4.2.6). Or la 1-forme de connexion partielle induite  $i^* \Theta$  est la 1-forme de Maurer-Cartan  $\Phi_0$  de  $\mathcal{G}_0$  et celle-ci est nulle en restriction à  $M_0$  d'après (3.6.4). Il s'ensuit que  $\varepsilon^* \Theta = s_0^*(i^* \Theta) = s_0^* \Phi_0 = 0$ .  $\square$

En restriction à chaque ouvert  $U_i$ , la différence  $\Theta - \Theta_i$  des connexions partielles  $\Theta$  et  $\Theta_i = \varphi_i^* \Phi$  se projette en une 1-forme feuilletée relative  $\theta_i$ . Le résultat suivant caractérise le recollement de connexions partielles locales:

**Proposition 4.5** *Soit  $\tau_{ij}$  le cocycle qui définit le  $\mathcal{G}$ -fibré principal  $\Gamma$ . Les 1-formes feuilletées relatives  $\theta_i$  vérifient  $\theta_j - \theta_i = d_{\mathcal{F}} \tau_{ij} = \tau_{ij}^* \Phi$ . Réciproquement, toute famille de 1-formes feuilletées relatives  $\theta_i$  vérifiant cette propriété détermine une 1-forme de connexion partielle  $\Theta \in \Omega^1(\mathcal{S}, \mathcal{F}_0; \nu^* \mathcal{S})$*

**Démonstration** Pour toute intersection  $U_i \cap U_j$ , la différence  $\theta_j - \theta_i$  se relève en une 1-forme feuilletée sur  $\pi^{-1}(U_i \cap U_j)$  donnée par

$$\begin{aligned} \pi^*(\theta_j - \theta_i) &= \Theta_i - \Theta_j &= \varphi_i^* \Phi - \varphi_j^* \Phi \\ &= \varphi_j^*((\varphi_i \circ \varphi_j)^* \Phi - \Phi) \\ &= \varphi_j^*((L_{\tau_{ij}})^* \Phi - \Phi) \\ &= \varphi_j^*(p^*(d_{\mathcal{F}} \tau_{ij})) \\ &= \pi^*(d_{\mathcal{F}} \tau_{ij}) \end{aligned}$$

d'après l'identité (3.6.3). Donc  $\theta_j - \theta_i = d_{\mathcal{F}} \tau_{ij} = \tau_{ij}^* \Phi$  d'après la propriété universelle (3.6.4) de  $\Phi$ . Réciproquement, si les 1-formes feuilletées  $\theta_i$  vérifient cette condition, les 1-formes de connexion partielle  $\Theta_i + \pi^* \theta_i$  sur  $\pi^{-1}(U_i)$  se recollent en une 1-forme de connexion partielle  $\Theta$  sur  $\Gamma$ .  $\square$

#### 4.4 Intégration différentiable: construction de la courbure et de la classe de Chern

On définit la **2-forme de courbure** par  $d_{\mathcal{F}} \Theta \in \Omega^2(\mathcal{S}, \mathcal{F}_0; \nu^* \mathcal{S})$ . Comme dans le cas classique, la courbure se projette en une 2-forme feuilletée fermée  $\Omega \in \Omega^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0; \nu^* \mathcal{F})$ .

**Théorème 4.6** *Le morphisme  $j^*: H^2(M, M_0; \mathcal{P}) \rightarrow H^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0; \nu^* \mathcal{F})$  envoie la classe  $\nu$  d'un cocycle sur la classe  $[\Omega]$  de la courbure d'une connexion partielle.*

**Démonstration** Soit  $(\{U_i\}, \{\tau_{ij}\})$  un cocycle qui représente la classe  $\tau = \delta^{-1}\nu$  tel que le recouvrement sous-jacent soit localement fini. Soit  $\{\rho_i\}$  une partition de l'unité subordonnée. On se propose de construire un représentant de la classe  $j^*\nu$  en procédant comme dans le cas de  $S^1$ -fibrés principaux (cf. [3]). Pour cela, on définit des 1-formes feuilletées relatives  $\theta_i = -\sum \rho_j d_{\mathcal{F}}\tau_{ij}$  qui vérifient  $\theta_j - \theta_i = d_{\mathcal{F}}\tau_{ij}$ . Puisque ces différences sont  $d_{\mathcal{F}}$ -fermées, les 2-formes feuilletées relatives locales  $d_{\mathcal{F}}\theta_i$  se recollent en une 2-forme feuilletée relative globale  $\Omega$  qui représente la classe  $j^*\nu$  (cf. [3]). Or la courbure de la connexion partielle  $\Theta$  construite dans la proposition 4.5 est donnée par  $d_{\mathcal{S}}\Theta = d_{\mathcal{S}}(\Theta_i + \pi^*\theta_i) = \pi^*d_{\mathcal{F}}\theta_i = \pi^*\Omega$ . Bref,  $j^*\nu = [\Omega]$  est la classe de la courbure  $\Omega$  de la connexion partielle  $\Theta$ .  $\square$

La classe  $[\Omega] \in H^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0; \nu^* \mathcal{F})$  sera appelée la **classe de Chern réelle** du  $\mathcal{G}$ -fibré principal  $\pi: \Gamma \rightarrow M$ . Le théorème 4.6 justifie la terminologie suivante: on dira que  $\nu = \delta\tau \in H^2(M, M_0; \mathcal{P})$  est la **classe de Chern entière** (cf. [5], [6]).

**Corollaire 4.7** *La classe dérivée  $d_1[\Lambda]$  est la classe de Chern réelle de  $\Gamma$ .*  $\square$

## 4.5 Intégration symplectique: construction de la structure symplectique

Soit  $\sigma \in \Omega^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0)$  la forme feuilletée symplectique de la structure de Poisson relevée  $\Lambda$  sur  $M$ . Dans cette étape, on cherche à construire un représentant symplectique  $\eta$  de la forme feuilletée relevée  $\pi^*\sigma \in \Omega^2(\mathcal{S}, \mathcal{F}_0)$ .

On fixe tout d'abord un couple de décompositions adaptées de  $TM_0$  et  $TM$ . Si les groupoïdes structuraux  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathcal{G}$  sont séparés, il existe des décompositions de  $T\mathcal{G}_0$  et  $T\mathcal{G}$  adaptées à celles de  $TM_0$  et  $TM$ . Si ce n'est pas le cas, il faut utiliser l'hypothèse  $(H_3)$  pour obtenir de telles décompositions. Celles-ci définissent des décompositions adaptées de  $T\Gamma$  en restriction aux ouverts de  $M$  qui trivialisent  $\pi$ . Par un argument de partitions de l'unité, on obtient une décomposition de  $T\Gamma$  adaptée au couple de départ. La projection  $\pi$  induit alors un morphisme de complexes qui rend commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^q(\mathcal{F}, \mathcal{F}_0; \nu^* \mathcal{F}) & \xrightarrow{\pi^*} & \Omega^q(\mathcal{S}, \mathcal{F}_0; \nu^* \mathcal{F}) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \Omega^{1,q}(M, M_0) & \xrightarrow{\pi^*} & \Omega^{1,q}(\Gamma, M_0) \end{array}$$

Soit  $\omega$  le représentant pur de  $\sigma$ . La 2-forme feuilletée  $\Omega \in \Omega^2(\mathcal{S}, \mathcal{F}_0; \nu^* \mathcal{S})$  déterminée par la 3-forme pure  $d_{1,0}\omega$  est la courbure d'une connexion partielle  $\Theta$  sur  $\Gamma$ . Le représentant pur  $\theta \in \Omega^{1,1}(\Gamma, M_0)$  de  $\Theta$  vérifie donc  $d_{0,1}\theta = \pi^*d_{1,0}\omega$ .

La 2-forme relative  $\xi = \pi^*\omega - \theta$  représente  $\pi^*\sigma$ . Les composantes pures de  $d\xi$  de type  $(0, 3)$  et  $(1, 2)$  sont nulles. La composante pure de type  $(2, 1)$  est  $d_{0,1}$ -fermée et donc représente une classe dans le terme  $E_1^{2,1}(\mathcal{S}, \mathcal{F}_0)$  de la suite spectrale de Leray-Serre de la paire  $(\Gamma, M_0)$ .

**Lemme 4.8** *Les fibres de  $\alpha: \Gamma \xrightarrow{\pi} M \xrightarrow{\alpha_0} M_0$  sont simplement connexes.*

**Démonstration** Pour tout point  $u \in M_0$ , le  $\mathcal{G}$ -fibré principal  $\pi: \Gamma \rightarrow M$  induit un fibré principal  $\pi: \alpha^{-1}(u) \rightarrow \alpha_0^{-1}(u)$  dont le groupe structural  $\mathcal{G}_u$  est la fibre de  $\mathcal{G}$  en  $u$ . La connexion  $\Theta$  induit une connexion usuelle sur ce fibré principal dont la courbure est la restriction de  $\Omega$  à  $\alpha_0^{-1}(u)$ . On considère la suite exacte d'homotopie

$$\dots \rightarrow \pi_2(\alpha_0^{-1}(u)) \xrightarrow{\partial_*} \pi_1(\mathcal{G}_u) = \mathcal{P}_u \longrightarrow \pi_1(\alpha^{-1}(u)) \longrightarrow \pi_1(\alpha_0^{-1}(u)) = 0$$

Le bord  $\partial_*$  envoie la classe d'homotopie d'une sphère  $s$  tangente à  $\alpha_0^{-1}(u)$  sur la période  $\int_s \Omega$  d'après [14]. Il est donc surjectif; d'où le lemme.  $\square$

Le lemme 4.8 implique que le terme  $E_1^{2,1}(\mathcal{S}, \mathcal{F}_0) = 0$  d'après [7]. Il existe donc une  $d_{0,1}$ -primitive  $\zeta \in \Omega^{2,0}(\Gamma, M_0)$  de la partie pure de type  $(2, 1)$  de  $d\xi$ .

**Proposition 4.9** *La 2-forme relative*

$$\eta = \pi^*\omega - \theta - \zeta$$

*est un représentant symplectique de  $\pi^*\sigma$  et donc  $\pi: (\Gamma, \eta) \rightarrow (M, \Lambda)$  est un morphisme de Poisson à fibres isotropes.*

**Démonstration.** La 3-forme relative  $d\eta = d_{2,-1}\theta - d_{1,0}\zeta$  est pure de type  $(3, 0)$  et  $d_{0,1}$ -fermée, c'est-à-dire que  $d\eta$  est une forme basique qui s'annule sur  $M_0$ . Donc  $\eta$  est un représentant fermé de  $\pi^*\sigma$ . Il reste à prouver que  $\eta$  est à noyau nul. Soit  $X$  un vecteur tangent à  $\Gamma$  en  $\gamma$  tel que

$$(4.5.7) \quad i_X \eta = i_X \pi^*\omega - i_X \theta - i_X \zeta = 0$$

Pour tout vecteur vertical  $Y$ , on obtient  $\Theta(Y)(X) = -i_X \theta(Y) = i_X \eta(Y) = 0$ . Le vecteur  $X$  est donc tangent à  $\mathcal{S}$  et l'identité (4.5.7) se réduit aux identités  $i_X \pi^*\omega = 0$  et  $i_X \theta = 0$ . Or, la première identité implique que  $X$  est vertical et donc  $X = 0$  d'après la deuxième identité.  $\square$

## 4.6 Intégration symplectique: construction de la structure de groupoïde symplectique

On se propose de finir la démonstration du théorème 1.3. D'après la proposition 4.9, les projections  $\alpha: (\Gamma, \eta) \rightarrow (M_0, \Lambda_0)$  et  $\beta: (\Gamma, \eta) \rightarrow (M_0, -\Lambda_0)$  forment une **paire duale stricte** ([27]). Il ne reste donc plus qu'à vérifier la proposition suivante:

**Proposition 4.10** *La paire duale stricte  $(\alpha, \beta)$  est complète.*

**Démonstration** Il suffit de montrer que  $\pi: (\Gamma, \eta) \rightarrow (M, \Lambda)$  est un morphisme de Poisson complet car la projection  $\alpha_0: (M, \Lambda) \rightarrow (M_0, \Lambda_0)$  est complète. On rappelle que  $\pi$  est **complet** au sens de [8] si pour toute 1-forme  $\mu$  sur  $M$  à support compact, le champ  $Y$  défini par  $i_Y \eta = -\pi^* \mu$  est complet. Puisque  $\pi$  est un morphisme de Poisson, le champ  $Y$  se projette sur le champ complet  $X$  défini par  $i_X \omega = -\mu_{0,1}$  où  $\mu_{0,1}$  est la partie pure de type  $(0, 1)$  de  $\mu$ . D'autre part, on a:

$$\Theta(Y) = i_Y \theta = -i_Y \eta + i_Y \pi^* \omega = \pi^* \mu - \pi^* \mu_{0,1} = \pi^* \mu_{1,0}$$

Le champ  $Y$  est donc un champ invariant par l'action de  $\mathcal{G}$  qui se projette sur le champ complet  $X$ . On en déduit que  $Y$  est un champ complet.  $\square$

D'après la caractérisation des groupoïdes symplectiques ([4]), toute paire duale complète est un groupoïde symplectique et donc  $(\Gamma, \eta)$  réalise l'intégration symplectique universelle de  $(M_0, \Lambda_0)$  ce qui achève la preuve du théorème 1.3.

## 5 Obstruction à l'intégrabilité

Soit  $(\Gamma, \eta)$  l'intégration symplectique universelle d'une structure de Poisson  $\Lambda_0 = (\mathcal{F}_0, \sigma_0)$  sur une variété  $M_0$ . Le but de cette section est de prouver le théorème 1.5, c'est-à-dire de montrer que les conditions de régularité repertoriées au théorème 1.1 sont bien nécessaires pour pouvoir intégrer la structure de Poisson  $\Lambda_0$ . Ce faisant, on reactualise dans notre contexte les travaux de P. Dazord en leur donnant leur sens véritable qui est de représenter  $d_1[\Lambda]$  comme une classe de Chern ainsi qu'elle a été introduite et décrite au §4.4. La démarche consistera à retrouver en ordre inversé les différentes étapes détaillées à la section 4.

On supposera pour simplifier que  $\Pi_1(\mathcal{F}_0)$  est séparé même si le théorème 1.5 reste valable dans le cas général des variétés de Poisson régulières.

### 5.1 Extensions de groupoïdes de Lie

Le **sous-groupoïde d'isotropie**  $Is\Gamma = \{\gamma \in \Gamma: \alpha(\gamma) = \beta(\gamma)\}$  de  $\Gamma$  est plongé, fermé et distingué dans  $\Gamma$ . Il n'est pas en général à fibres connexes, mais ce sera le cas pour la composante connexe  $\mathcal{N}_0$  de  $M_0$  dans  $Is\Gamma$ . L'action naturelle à droite de  $\mathcal{N}_0$  sur  $\Gamma$  est donc libre et propre. D'après le critère de Godement ([22]), le quotient  $M = \Gamma/\mathcal{N}_0$  est muni d'une structure de variété pour laquelle  $\pi: \Gamma \rightarrow M$  est un **fibré principal de groupoïde structural**  $\mathcal{N}_0$ .

La variété quotient  $M$  hérite de  $\Gamma$  une structure de groupoïde de Lie à fibres simplement connexes qui s'étale sur  $\Pi_1(\mathcal{F}_0)$ . D'après [19], ils sont en fait isomorphes. Bref, on a une **extension de groupoïdes de Lie**



$$(5.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} \mathcal{N}_0 & \xrightarrow{i} & \Gamma & \xrightarrow{\pi} & M = \Pi_1(\mathcal{F}_0) \\ & \searrow p_0 & \downarrow \alpha & \swarrow \beta & \nearrow \alpha_0 \\ & & M_0 & & \searrow \beta_0 \end{array}$$

On s'intéresse à l'extension infinitésimale associée. On rappelle que:

- i) la projection  $\alpha_0$  induit un isomorphisme  $\alpha_{0*}: \mathcal{L}_M \rightarrow \mathfrak{X}(\mathcal{F}_0)$  où  $\mathcal{L}_M$  est l'algèbre de Lie des champs invariants à gauche sur  $M$  (voir [11]);
- ii) l'algèbre de Lie  $\mathcal{L}_\Gamma$  des champs invariants à gauche sur  $\Gamma$  est l'image du morphisme injectif d'algèbres de Lie

$$\alpha^\# = \eta^\# \circ \alpha^*: \Omega^1(M_0) \longrightarrow \mathfrak{X}(\Gamma)$$

qui, à toute 1-forme  $\mu$ , associe le champ  $Y = \alpha^\#$  défini par  $i_Y \eta = -\alpha^* \mu$  (voir [4]).

Alors puisque la projection  $\alpha$  est un morphisme de Poisson, on obtient un isomorphisme de suites exactes d'algèbres de Lie

$$(5.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_{\mathcal{N}_0} & \longrightarrow & \mathcal{L}_\Gamma & \xrightarrow{\pi_*} & \mathcal{L}_M \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \alpha^\# \uparrow & & \downarrow \alpha_{0*} \\ 0 & \longrightarrow & \Omega^1(M_0, \mathcal{F}_0) & \longrightarrow & \Omega^1(M_0) & \xrightarrow{\Lambda^\#} & \mathfrak{X}(\mathcal{F}_0) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où  $\pi_*$  est le morphisme d'algèbres de Lie induit par  $\pi$ .

Bref, l'extension d'algébroïdes de Lie (2.3.2) est l'extension infinitésimale associée à l'extension de groupoïdes de Lie (5.1.1). En particulier, on a le résultat suivant:

**Proposition 5.1** *Le fibré conormal  $\nu^* \mathcal{F}_0$  est l'algébroïde de Lie de  $\mathcal{N}_0$ .  $\square$*

## 5.2 Action structurale, isotropie et groupoïde structural

D'après la proposition 5.1 et le diagramme (5.1.2),  $\alpha^\#: \Omega^1(M_0, \mathcal{F}_0) \rightarrow \mathcal{L}_\Gamma$  est l'action infinitésimale associée à l'action de  $\mathcal{N}_0$  sur  $\Gamma$ . Puisque le morphisme de Poisson  $\alpha$  est complet (voir [4]), les champs verticaux  $\alpha^\# \mu$  sont complets. Si l'on note  $\varphi_t^{\alpha^\# \mu}$  leurs flots, l'action infinitésimale s'intègre en une action à droite du groupoïde  $\nu^* \mathcal{F}_0$  sur  $\Gamma$

$$(5.2.3) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma \times_{M_0} \nu^* \mathcal{F}_0 & \longrightarrow & \Gamma \\ (\gamma, \mu) & \mapsto & \varphi_1^{\alpha^\# \mu}(\gamma) \end{array}$$

qui relève l'action structurale de  $\mathcal{N}_0$  sur  $\Gamma$  (cf. [5]). Son **isotropie**  $\mathcal{I}_0$  est engendrée par les 1-formes relatives  $\mu$  pour lesquelles  $\varphi_1^{\alpha^\# \mu}$  est l'identité. Par construction,  $\mathcal{N}_0$  est le groupoïde quotient  $\nu^* \mathcal{F}_0 / \mathcal{I}_0$ .

On montre aisément que l'action (5.2.3) est propre et donc que celle de  $\mathcal{N}_0$  est libre et propre. Bref, on retrouve la structure de  $\mathcal{N}_0$ -fibré principal sur  $\Gamma$  comme une conséquence de la complétion de  $\alpha$ .

### 5.3 Construction du fibré principal à groupoïde structural

Soit  $\Lambda = (\mathcal{F}, \sigma)$  la structure de Poisson relevée de  $\Lambda_0$  sur le groupoïde d'homotopie  $M = \Pi_1(\mathcal{F}_0)$ . D'après [6], la projection  $\pi: (\Gamma, \eta) \rightarrow (M, \Lambda)$  est une **réalisation isotrope de Libermann**, i.e. un morphisme de Poisson complet à fibres connexes séparées et isotropes. La complétion de  $\pi$  entraîne que tout champ vertical  $Y = \pi^\# \mu$  défini par  $i_Y \eta = -\pi^* \mu$  est complet et son flot est noté  $\varphi_t^\mu$ .

L'action de  $\nu^* \mathcal{F}$  sur  $\Gamma$  définie par

$$(5.3.4) \quad \begin{array}{ccc} \Gamma \times_M \nu^* \mathcal{F} & \longrightarrow & \Gamma \\ (\gamma, \mu) & \longmapsto & \varphi_1^\mu(\gamma) \end{array}$$

est le relèvement par  $\alpha_0$  de l'action à droite (5.2.3) de  $\nu^* \mathcal{F}_0$  sur  $\Gamma$ . Son isotropie  $\mathcal{I}$  est l'image réciproque par  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  de l'isotropie  $\mathcal{I}_0$  de l'action bilatère de  $\nu^* \mathcal{F}_0$  sur  $\Gamma$ . Les projections  $\alpha_0$  et  $\beta_0$  définissent alors un même groupoïde de Lie image réciproque  $\mathcal{N} = \nu^* \mathcal{F} / \mathcal{I}$ .

L'action de  $\mathcal{N}$  sur  $\Gamma$  est libre et propre et donc  $\Gamma$  est muni d'une structure de  $\mathcal{N}$ -fibré principal au-dessus de  $M$ . Celle-ci est essentiellement identique à la structure de  $\mathcal{N}_0$ -fibré principal décrite au §5.2: le groupoïde  $\mathcal{N}$  est le modèle local commun.

### 5.4 Construction de la connexion $\mathcal{F}$ -partielle canonique

Soit  $Y = \pi^\# \mu$  le champ vertical complet défini par une 1-forme relative  $\mu$  sur  $M$ . La courbe intégrale de  $Y$  passant par  $\gamma \in \Gamma$  s'écrit

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_t^\mu(\gamma) = \varphi_1^{t\mu}(\gamma) \in \Gamma$$

Il s'ensuit que  $Y$  est le champ fondamental de l'action de  $\mathcal{N}$  sur  $\Gamma$  associé à la section  $\mu$  de l'algébroïde de Lie  $\nu^* \mathcal{F}$ .

Soit  $\mathcal{S}$  le feuilletage image réciproque de  $\mathcal{F}$  par  $\pi$ . A toute décomposition de  $TM_0$ , on associe la 1-forme feuilletée  $\Theta \in \Omega^1(\mathcal{S}; \nu^* \mathcal{S})$  donnée par

$$\Theta(\pi^\# \mu) = \pi^* \mu_{1,0}$$

où  $\mu_{1,0}$  est la partie pure de type  $(1, 0)$  de la 1-forme  $\mu$  pour la décomposition de  $TM$  adaptée à celle de  $TM_0$ .

**Proposition 5.2** *La 1-forme feuilletée  $\Theta$  est une 1-forme de connexion  $\mathcal{F}$ -partielle relative sur  $\Gamma$  que l'on appellera **canonique**.*

**Démonstration** Pour toute 1-forme relative  $\mu$  sur  $M$ , la 1-forme  $\Theta$  vérifie la relation  $\Theta(\pi^\# \mu) = \pi^* \mu$ . L'invariance de  $\Theta$  est obtenue en remarquant que l'on a

$$(5.4.5) \quad (\varphi_1^\mu)^* \Theta - \Theta = \pi^* d_{\mathcal{F}} \mu$$

Si l'on pose  $Y = \pi^\# \mu$ , alors la 1-forme feuilletée  $i_Y d_{\mathcal{S}} \Theta$  est nulle. En effet, pour toute 1-forme  $\mu_1$  sur  $M$ , on a:

$$d_{\mathcal{S}} \Theta(Y, Y_1) = i_Y d_{\mathcal{S}} \Theta(Y_1) - i_{Y_1} d_{\mathcal{S}} \Theta(Y) - \Theta([Y, Y_1]) = \pi^*(i_{X_1} d\mu + \{\mu, \mu_1\}) = 0$$

où le champ  $Y_1 = \pi^\# \mu_1$  se projette sur le champ  $X_1 = \Lambda^\# \mu_1$ . Il s'ensuit que

$$L_Y \Theta = i_Y d_{\mathcal{S}} \Theta + d_{\mathcal{S}} i_Y \Theta = d_{\mathcal{S}}(i_Y \Theta) = d_{\mathcal{S}}(\pi^* \mu) = \pi^* d_{\mathcal{F}} \mu$$

et donc

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^\mu)^* \Theta = (\varphi_t^\mu)^* L_Y \Theta = \pi^* d_{\mathcal{F}} \mu$$

L'identité (5.4.5) s'en déduit par intégration. Enfin, puisque l'involution  $\iota$  est un isomorphisme antisymplectique, on a  $\iota^* \Theta = -\Theta$  et donc la 1-forme de connexion partielle est relative, c'est-à-dire  $\Theta \in \Omega^2(\mathcal{S}, \mathcal{F}_0; \nu^* \mathcal{S})$ .  $\square$

**Proposition 5.3** *La classe de Chern réelle du  $\mathcal{N}$ -fibré principal  $\Gamma$  est égale à la classe dérivée  $d_1[\Lambda]$ .*

**Démonstration** Pour tout couple  $\mu_1, \mu_2 \in \Omega^{0,1}(M)$ , on a:

$$d_{\mathcal{F}} \Theta(Y_1, Y_2) = -\Theta([Y_1, Y_2]) = -\pi^* \{\mu_1, \mu_2\}_{1,0}$$

où  $Y_i$  est le champ horizontal  $\pi^\# \mu_i$ . La courbure de  $\Theta$  est donc donnée par

$$\Omega(X_1, X_2) = -\{\mu_1, \mu_2\}_{1,0} = i_{X_2} i_{X_1} d_{1,0} \omega$$

où  $X_i = \Lambda^\# \mu_i$  et  $\omega$  est le représentant pur de type  $(0, 2)$  de  $\sigma$ .  $\square$

## 5.5 Obstruction à l'intégrabilité

D'après la proposition 5.3, les périodes sphériques dérivées de  $\Lambda$  sont les périodes sphériques de la courbure  $\Omega$  de la connexion partielle canonique  $\Theta$ . Comme dans le cas des  $S^1$ -fibrés principaux (voir [14]), on en déduira la proposition suivante:

**Proposition 5.4** *L'isotropie  $\mathcal{I}_0$  de l'action de  $\nu^* \mathcal{F}_0$  sur  $\Gamma$  est égale au groupoïde dérivé  $\mathcal{P}_0$ .*

**Démonstration** Pour tout  $u \in M_0$ , le  $\mathcal{N}$ -fibré principal  $\pi: \Gamma \rightarrow M$  induit un fibré principal  $\pi: \alpha^{-1}(u) \rightarrow \alpha_0^{-1}(u)$  dont le groupe structural  $\mathcal{N}_u$  est la fibre de  $\mathcal{N}$  en  $u$ . Toute sphère  $s$  tangente à  $\alpha_0^{-1}(u)$  se relève en un disque  $D$  tangent à  $\alpha^{-1}(u)$ . Son bord est la courbe intégrale  $C$  passant par  $u$  d'un champ  $\pi^\# \mu$  associé à un élément  $\mu$  de l'isotropie  $\mathcal{I}$ . Réciproquement, puisque la fibre  $\alpha^{-1}(u)$  est simplement connexe, une telle courbe est toujours le bord d'un disque qui se projette par  $\pi$  sur une sphère tangente à  $\alpha_0^{-1}(u)$ . Alors on a

$$\pi^* \left( \int_s \Omega \right) = \int_D d_{\mathcal{F}} \Theta = \int_C \Theta = \pi^* \mu$$

Bref, l'isotropie  $\mathcal{I}$  est égale au groupoïde dérivé  $\mathcal{P}$  au-dessus de l'espace des unités  $M_0$ . Il s'ensuit que  $\mathcal{I}_0 = \mathcal{P}_0$  d'après le lemme 3.7.  $\square$

D'après la proposition 5.4, on obtient le théorème suivant dont le théorème 1.5 est une conséquence immédiate:

**Théorème 5.5** *Le groupoïde de Lie  $\mathcal{N}_0$  est égal au groupoïde structural  $\mathcal{G}_0$  de la variété de Poisson  $(M_0, \Lambda_0)$ .  $\square$*

## 6 Cohomologie des submersions

L'objet de cette section est de démontrer le résultat de cohomologie utilisé dans l'intégration cohomologique (voir le théorème 4.1).

### 6.1 Cohomologie relative des submersions

Soient  $M$  une variété,  $B$  une sous-variété de  $M$  et  $\pi: M \rightarrow B$  une submersion surjective. Soient  $\mathcal{Q}_0$  un faisceau de base  $B$  et  $\mathcal{Q}$  le faisceau image réciproque  $\pi^* \mathcal{Q}_0$ .

Le faisceau de Leray  $\mathcal{H}^q(\pi)$  est engendré par le préfaisceau qui, à tout ouvert  $V$  de  $B$ , associe le groupe  $H^q(\pi^{-1}(V), V; \mathcal{Q})$ ; la fibre de  $b$  est la limite inductive

$$\mathcal{H}^q(\pi)(b) = \varinjlim_{V \ni b} H^q(\pi^{-1}(V), V; \mathcal{Q})$$

Les morphismes induits par les inclusions de  $F_b$  dans  $\pi^{-1}(V)$  définissent par passage à la limite un morphisme  $\rho_b: \mathcal{H}^q(\pi)(b) \rightarrow H^q(F_b, b; \mathcal{Q})$  qui n'est en général ni injectif, ni surjectif. En fait,  $\rho_b$  est un isomorphisme si  $\{\pi^{-1}(V)\}$  est un système fondamental de voisinages de  $F_b$ ; c'est le cas si  $F_b$  est compacte (voir [9]). On considère la **suite spectrale de Leray-Serre de cohomologie relative de la paire**  $(M, B)$  (voir [9])

$$E_2^{p,q}(\pi) = H^p(B; \mathcal{H}^q(\pi)) \implies H^{p+q}(M, B; \mathcal{Q})$$

Le terme  $E_2^{0,q}(\pi)$  s'identifie aux sections  $\Gamma(\mathcal{H}^q(\pi))$  de  $\mathcal{H}^q(\pi)$ . En degré  $q \geq 1$ , les morphismes  $\rho_b$  définissent donc un morphisme  $\rho_2: E_2^{0,q}(\pi) \rightarrow \prod_{b \in B} H^q(F_b; \mathcal{Q})$ . Si les fibres  $F_b$  sont compactes, alors  $\rho_2$  est injectif. Par construction, le diagramme suivant est commutatif:

$$(6.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} H^q(M, B; \mathcal{Q}) & \xrightarrow{\rho} & \prod_{b \in B} H^q(F_b; \mathcal{Q}) \\ \downarrow & \nearrow \rho_\infty & \uparrow \rho_2 \\ 0 \longrightarrow E_\infty^{0,q}(\pi) & \xrightarrow{\quad} & E_2^{0,q}(\pi) \end{array}$$

où le morphisme  $\rho$  est induit par les inclusions des fibres  $F_b$  dans  $M$ . Si celles-ci sont compactes, alors les morphismes  $\rho_2$  et  $\rho_\infty$  sont injectifs.

**Théorème 6.1** *Si les fibres  $F_b$  sont connexes et  $H^1(F_b; \mathbb{Z}) = 0$ , alors*

- i)  $H^q(M, B; \mathcal{Q}) = 0$  pour  $q = 0, 1$ ;
- ii)  $H^2(M, B; \mathcal{Q}) = E_\infty^{0,2}(\pi)$  et le morphisme

$$\rho: H^2(M, B; \mathcal{Q}) \rightarrow \prod_{b \in B} H^2(F_b; \mathcal{Q})$$

*est injectif.*

En degré 0, on considère le morphisme  $\pi^*: H^0(B; \mathcal{Q}_0) \longrightarrow H^0(B; \mathcal{Q})$ . Puisque les fibres de  $\pi$  sont connexes et celles du faisceau  $\mathcal{Q}_0$  sont discrètes, toute section de  $\mathcal{Q}$  est constante en restriction à chaque fibre. Donc le morphisme  $\pi^*$  qui est évidemment injectif est aussi surjectif. En degré 1 et 2, on procédera en quatre étapes. L'étude d'une famille de voisinages propres de  $B$  dans la 1ère étape permettra de construire dans la 2ème étape un recouvrement  $\{W_n\}$  **annihilant**  $H^1(M, B; \mathcal{Q})$ . Dans la 3ème étape, on vérifiera l'annulation de certains termes de la suite spectrale de Čech de  $\{W_n\}$ . La preuve du théorème combinerà ce résultat avec la comparaison des suites spectrales de Leray-Serre des restrictions  $\pi_n = \pi|_{W_n}$ .

## 6.2 Tubes de $B$

On fixe une métrique riemannienne sur  $M$  dont la métrique induite sur chaque fibre  $F_b$  est complète. À toute fonction continue strictement positive  $r: B \rightarrow \mathbb{R}$ , on associe la réunion  $W(r)$  des boules géodésiques fermées dans  $F_b$  de centre  $b$  et de rayon  $r(b)$ . Le voisinage  $W(r)$  de  $B$  sera appelé le **tube de  $B$  de rayon  $r$** . On montre tout d'abord deux propriétés des tubes:

**Lemme 6.2** *Pour tout tube  $W = W(r)$ , la projection  $\pi|_W: W \rightarrow B$  est propre.*

**Démonstration** Pour tout point  $b \in B$ , soit  $U_b$  un voisinage compact de la boule géodésique  $W_b$  dans  $F_b$ . La fonction rayon  $r$  étant continue, il existe un voisinage ouvert relativement compact  $V_b$  de  $b$  et un voisinage produit  $\overline{V}_b \times U_b$  de  $U_b$  (où l'on note  $\overline{V}_b$  l'adhérence de  $V_b$ ) dont l'intersection avec  $W$  est un compact saturé pour  $\pi|_W$ . Pour tout compact  $K \subset B$ , on extrait un sous-recouvrement fini  $\{V_i \cap K\}_{i=1}^n$  du recouvrement  $\{V_b \cap K\}$ . Alors

$$(\pi|_W)^{-1}(K) = \bigcup_{i=1}^n ((\overline{V}_i \cap K) \times U_i) \cap W$$

est compact.  $\square$

**Lemme 6.3** *Pour tout voisinage  $U$  de  $B$  tel que la projection  $\pi|_U : U \rightarrow B$  est propre, il existe un tube  $W$  tel que  $U \subset W$ .*

**Démonstration** Puisque  $\pi|_U$  est propre, toute fibre  $U_b$  est compacte et donc il existe une boule géodésique  $W_b$  dont l'intérieur  $\overset{\circ}{W}_b \supset U_b$ . Du recouvrement ouvert  $\{V_b \times \overset{\circ}{W}_b\}$ , on extrait un raffinement localement fini  $\{V_i \times \overset{\circ}{W}_i\}$ . Soit  $r_i$  le rayon de la boule  $W_i$ . La fonction  $s : B \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $s(b) = \sup \{r_i : b \in W_i\}$  est une fonction en escalier. Si  $r : B \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue telle que  $r(b) \geq s(b)$  pour tout  $b \in B$ , alors  $U \subset W = W(r)$ .  $\square$

Enfin, on s'intéresse aux propriétés de la suite spectrale de  $\pi|_W$ :

**Lemme 6.4** *Si  $W$  est un tube de  $B$ ; alors on a*

- i)  $H^0(W, B; \mathcal{Q}) = 0$ ;
- ii)  $H^1(W, B; \mathcal{Q}) = E_2^{0,1}(\pi|_W)$ ;
- iii) *les morphismes*

$$\rho : H^1(W, B; \mathcal{Q}) \longrightarrow \prod_{b \in B} H^1(W_b; \mathcal{Q})$$

*et*

$$\rho_\infty : E_\infty^{0,2}(\pi|_W) \longrightarrow \prod_{b \in B} H^2(W_b; \mathcal{Q})$$

*sont injectifs.*

**Démonstration** Les fibres  $W_b$  étant connexes, le faisceau de Leray  $\mathcal{H}^0(\pi|_W) = 0$ . Par conséquent, on a:

- i)  $H^0(W, B; \mathcal{Q}) = 0$ ;
- ii)  $H^1(W, B; \mathcal{Q}) = E_2^{0,1}(\pi|_W)$ .
- iii) Puisque  $\pi|_W$  est propre, le morphisme  $\rho_2 : E_2^{0,q}(\pi|_W) \rightarrow \prod_{b \in B} H^q(W_b; \mathcal{Q})$  est injectif en degré 1 et 2. Donc les morphismes  $\rho : H^1(W, B; \mathcal{Q}) \rightarrow \prod_{b \in B} H^1(W_b; \mathcal{Q})$  et  $\rho_\infty : E_\infty^{0,2}(\pi|_W) \rightarrow \prod_{b \in B} H^2(W_b; \mathcal{Q})$  sont aussi injectifs.  $\square$

### 6.3 Recouvrement d'annihilation

On se propose de construire un **recouvrement annihilant**  $H^1(M, B; \mathcal{Q})$ , i.e. un recouvrement fermé croissant  $\{W_n\}$  de  $M$  tel que pour tout  $n$ ,

- i)  $W_n$  est un tube et l'application  $\pi_n: W_n \rightarrow B$  est propre à fibres connexes;
- ii) le morphisme de restriction  $H^1(W_{n+1}, B; \mathcal{Q}) \rightarrow H^1(W_n, B; \mathcal{Q})$  est nul;
- iii) le morphisme de faisceaux  $\mathcal{H}^1(\pi_{n+1}) \rightarrow \mathcal{H}^1(\pi_n)$  est nul.

Pour cela, on montre tout d'abord la condition d'annihilation suivante:

**Lemme 6.5** *Soient  $W \subset \widehat{W}$  deux tubes de  $B$ . Si pour point tout  $b \in B$ , le morphisme de restriction  $r_b: H^1(\widehat{W}_b; \mathcal{Q}) \rightarrow H^1(W_b; \mathcal{Q})$  est nul, alors le morphisme de restriction*

$$r: H^1(\widehat{W}, B; \mathcal{Q}) \rightarrow H^1(W, B; \mathcal{Q})$$

*et le morphisme de faisceaux*

$$r: \mathcal{H}^1(\pi|_{\widehat{W}}) \rightarrow \mathcal{H}^1(\pi|_W)$$

*sont nuls.*

**Démonstration** On considère le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\widehat{W}, B; \mathcal{Q}) & \xrightarrow{r} & H^1(W, B; \mathcal{Q}) \\ \widehat{\rho} \downarrow & & \downarrow \rho \\ \prod_{b \in B} H^1(\widehat{W}_b; \mathcal{Q}) & \xrightarrow{\{r_b\}} & \prod_{b \in B} H^1(W_b; \mathcal{Q}) \end{array}$$

D'après le lemme 6.4, le morphisme  $\rho$  est injectif. On en déduit que le morphisme  $r$  est nul car  $\{r_b\}$  est nul. Par ailleurs, pour tout  $b \in B$ , on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1(\pi|_{\widehat{W}})(b) & \xrightarrow{r_b} & \mathcal{H}^1(\pi|_W)(b) \\ \widehat{\rho}_b \downarrow & & \downarrow \rho_b \\ H^1(\widehat{W}_b; \mathcal{Q}) & \xrightarrow{r_b} & H^1(W_b; \mathcal{Q}) \end{array}$$

où  $\rho_b$  est un isomorphisme. Par conséquent, le morphisme de faisceaux  $r$  est nul fibre à fibre et donc il est nul.  $\square$  J

**Proposition 6.6** *Si  $H^1(F_b; \mathbb{Z}) = 0$ , alors pour tout tube  $W$  de  $B$ , il existe un tube  $\widehat{W} \supset W$  de  $B$  tel que le morphisme de restriction*

$$r: H^1(\widehat{W}, B; \mathcal{Q}) \rightarrow H^1(W, B; \mathcal{Q})$$

et le morphisme de faisceaux

$$r: \mathcal{H}^1(\pi|_{\widehat{W}}) \rightarrow \mathcal{H}^1(\pi|_W)$$

sont nuls.

**Démonstration** Pour tout point  $b \in B$ , soit  $U_b$  un voisinage compact de la boule géodésique  $W_b$  dans la fibre  $F_b$ . Puisque  $H^1(F_b; \mathbb{Z}) = 0$ , il existe un voisinage compact  $\widehat{U}_b$  de  $U_b$  tel que le morphisme de restriction  $r: H^1(\widehat{U}_b; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(U_b; \mathbb{Z})$  est nul. La continuité du rayon entraîne l'existence d'un voisinage ouvert relativement compact  $V_b$  de  $b$  et d'un voisinage compact  $\overline{V}_b \times \widehat{U}_b$  de  $\widehat{U}_b$  tel que  $(\overline{V}_b \times U_b) \cap W$  est un compact saturé pour  $\pi|_W$ . Soit  $\{V_i \times \widehat{U}_i\}$  un raffinement localement fini du recouvrement ouvert  $\{V_b \times \widehat{U}_b\}$  de  $W$ . Si l'on pose

$$\widehat{U} = \bigcup \overline{V}_i \times \widehat{U}_i \supset U = \bigcup \overline{V}_i \times U_i \supset W$$

alors la projection  $\pi|_{\widehat{U}} : \widehat{U} \rightarrow B$  est propre. En outre, tout morphisme de restriction  $H^1(\widehat{U}_b; \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(W_b; \mathbb{Q})$  est nul, car il se factorise à travers  $H^1(U_b; \mathbb{Q})$ . D'après le lemme 6.3, il existe un tube  $\widehat{W} \supset \widehat{U}$ . Évidemment les morphismes de restriction  $r_b: H^1(\widehat{W}_b; \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(W_b; \mathbb{Q})$  sont encore nuls, c'est-à-dire  $\widehat{W}$  vérifie la condition du lemme 6.5. D'où la proposition.  $\square$

**Théorème 6.7** Si  $H^1(F_b; \mathbb{Z}) = 0$ , alors il existe un recouvrement  $\mathcal{W} = \{W_n\}$  annihilant  $H^1(M, B; \mathbb{Q})$ .

**Démonstration** On définit  $W_0 = B$ , puis on procède par récurrence. On suppose construit un tube  $W_n$  contenant le tube  $W(n)$  de rayon  $n$ . Soit  $U$  le voisinage propre  $W_n \cup W(n+1)$  de  $B$ . D'après le lemme 6.3, il existe un tube  $\widehat{W} \supset U$ . On définit  $W_{n+1}$  comme le tube  $\widehat{W}$  associé au tube  $W$  d'après la proposition 6.6.  $\square$

## 6.4 Suite spectrale de Čech de $\mathcal{W}$

Soit  $\mathcal{H}^q$  le système de coefficients sur le nerf du recouvrement  $\mathcal{W} = \{W_n\}$  qui, à tout  $p$ -simplexe singulier  $n_0 < \dots < n_p$ , associe le groupe

$$H^q(W_{n_0 \dots n_p}, B; \mathbb{Q}) = H^q(W_{n_0}, B; \mathbb{Q})$$

où  $W_{n_0 \dots n_p} = W_{n_0} \cap \dots \cap W_{n_p}$ . Soit  $E_2^{p,q}(\mathcal{W}) \Rightarrow H^{p+q}(M, B; \mathbb{Q})$  la **suite spectrale de Čech attachée au recouvrement  $\mathcal{W}$**  ([9]) qui vérifie:

$$E_1^{p,q}(\mathcal{W}) = \mathcal{C}^p(\mathcal{W}, \mathcal{H}^q) = \prod_{n_0 < \dots < n_p} H^q(W_{n_0 \dots n_p}, B; \mathbb{Q})$$

$$E_2^{p,q}(\mathcal{W}) = H^p(\mathcal{W}, \mathcal{H}^q)$$



**Théorème 6.8** Soit  $\mathcal{W}$  un recouvrement annihilant  $H^1(M, B; \mathcal{Q})$ . Alors on a:

$$E_1^{p,0}(\mathcal{W}) = 0 \quad \text{pour tout } p$$

$$E_2^{1,1}(\mathcal{W}) = 0$$

**Démonstration** D'après le lemme 6.4,  $H^0(W_n, B; \mathcal{Q}) = 0$  pour tout  $n$  et donc  $\mathcal{H}^0 = 0$ . Il s'ensuit que  $E_1^{p,0}(\mathcal{W}) = 0$  pour tout  $p$ . D'autre part, il faut montrer que la suite

$$E_1^{0,1}(\mathcal{W}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{W}, \mathcal{H}^1) \xrightarrow{d_1} E_1^{1,1}(\mathcal{W}) = \mathcal{C}^1(\mathcal{W}, \mathcal{H}^1) \xrightarrow{d_1} E_1^{2,1}(\mathcal{W}) = \mathcal{C}^2(\mathcal{W}, \mathcal{H}^1)$$

est exacte, où  $d_1$  est la différentielle de Čech  $\delta$ . Une 1-cochaîne  $\nu \in C^1(\mathcal{W}, \mathcal{H}^1)$  associe à tout couple  $n < m$  une classe

$$\nu_{nm} \in H^1(W_{nm}, B; \mathcal{Q}) = H^1(W_n, B; \mathcal{Q})$$

La 1-cochaîne  $\nu$  est un 1-cocycle si pour tout triplet  $n < m < p$ , la classe

$$\nu_{nm} - \nu_{np} + \nu_{mp} = 0$$

en restriction à  $W_{nmp} = W_n$ . Puisque  $\mathcal{W}$  est un recouvrement d'annihilation, la classe  $\nu_{mp} \in H^1(W_m, B; \mathcal{Q})$  est nulle en restriction à  $W_n$ . Bref,  $\nu$  est un 1-cocycle si pour tout triplet  $n < m < p$ , on a:

$$\nu_{nm} = \nu_{np}$$

en restriction à  $W_n$ . Soit  $\mu \in C^0(\mathcal{W}, \mathcal{H}^1)$  la 0-cochaîne qui, à tout  $n$ , associe la classe

$$\mu_n = -\nu_{nm} \in H^1(W_n, B; \mathcal{Q})$$

où  $n < m$ . Cette classe est indépendante du choix de  $m$ . Il ne reste plus qu'à vérifier que  $\delta\mu = \nu$ . Or, on a  $\mu_m - \mu_n = -\mu_n = \nu_{nm}$  en restriction à  $W_{nm} = W_n$  car la restriction de  $\mu_m$  à  $W_n$  est nulle.  $\square$

**Corollaire 6.9**

$$H^1(M, B; \mathcal{Q}) = E_2^{0,1}(\mathcal{W})$$

$$H^2(M, B; \mathcal{Q}) = E_\infty^{0,2}(\mathcal{W}) \quad \square$$

**Corollaire 6.10** (i)  $H^1(M, B; \mathcal{Q}) = 0$ ;

(ii) le morphisme de restriction  $\{r_n\}: H^2(M, B; \mathcal{Q}) \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} H^2(W_n, B; \mathcal{Q})$  est injectif.

**Démonstration** D'après le corollaire 6.9, en degré 1 et 2 l'inclusion

$$0 \rightarrow E_{\infty}^{0,q}(\mathcal{W}) \longrightarrow E_1^{0,q}(\mathcal{W}) = \prod_{n \in \mathbb{N}} H^q(W_n, B; \mathcal{Q})$$

coïncide avec le morphisme de restriction

$$\{r_n\}: H^q(M, B; \mathcal{Q}) \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} H^q(W_n, B; \mathcal{Q})$$

qui est donc injectif. En degré 1, ce morphisme est en plus nul, car  $\mathcal{W}$  est un recouvrement d'annihilation.  $\square$

## 6.5 Comparaison des suites spectrales

**Proposition 6.11**  $H^2(M, B; \mathcal{Q}) = E_{\infty}^{0,2}(\pi)$

**Démonstration** Les inclusions  $W_n \subset W_{n+1} \subset M$  induisent des morphismes

$$(6.5.2) \quad \begin{array}{ccccc} E_2^{p,q}(\pi) & = & H^p(B; \mathcal{H}^p(\pi)) & \implies & H^{p+q}(M, B; \mathcal{Q}) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ E_2^{p,q}(\pi_{n+1}) & = & H^p(B; \mathcal{H}^p(\pi_{n+1})) & \implies & H^{p+q}(W_{n+1}, B; \mathcal{Q}) \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ E_2^{p,q}(\pi_n) & = & H^p(B; \mathcal{H}^p(\pi_n)) & \implies & H^{p+q}(W_n, B; \mathcal{Q}) \end{array}$$

D'autre part, les faisceaux de Leray vérifient:

- 1)  $\mathcal{H}^0(\pi) = \mathcal{H}^0(\pi_n) = 0$  car les fibres sont connexes;
- 2)  $\mathcal{H}^1(\pi) = 0$  d'après le corollaire 6.10;
- 3) le morphisme de restriction  $\mathcal{H}^1(\pi_{n+1}) \rightarrow \mathcal{H}^1(\pi_n)$  est nul car  $\mathcal{W}$  est un recouvrement d'annihilation.

On en déduit que

$$\begin{aligned} E_2^{p,0}(\pi) &= E_2^{p,0}(\pi_n) = 0 \\ E_2^{p,1}(\pi) &= 0 \end{aligned}$$

et le morphisme de restriction

$$E_2^{p,1}(\pi_{n+1}) \longrightarrow E_2^{p,1}(\pi_n)$$

est nul pour tout  $p$  et tout  $n$ . En degré 2, le diagramme (6.5.2) se réduit donc au diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & & & \\
& & \parallel & & & & \\
0 & \longrightarrow & E_{\infty}^{1,1}(\pi) & \longrightarrow & H^2(M, B; \mathcal{Q}) & \longrightarrow & E_{\infty}^{0,2}(\pi) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(6.5.3) \quad 0 & \longrightarrow & E_{\infty}^{1,1}(\pi_{n+1}) & \longrightarrow & H^2(W_{n+1}, B; \mathcal{Q}) & \longrightarrow & E_{\infty}^{0,2}(\pi_{n+1}) \longrightarrow 0 \\
& & 0 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & E_{\infty}^{1,1}(\pi_n) & \longrightarrow & H^2(W_n, B; \mathcal{Q}) & \longrightarrow & E_{\infty}^{0,2}(\pi_n) \longrightarrow 0
\end{array}$$

D'où la proposition.  $\square$

**Proposition 6.12** *Le morphisme  $\rho: H^2(M, B; \mathcal{Q}) \rightarrow \prod_{b \in B} H^2(F_b; \mathcal{Q})$  est injectif.*

**Démonstration** On remarque tout d'abord que le morphisme  $\rho$  coïncide avec le morphisme  $\rho_{\infty}: E_{\infty}^{0,2}(\pi) \rightarrow \prod_{b \in B} H^2(F_b; \mathcal{Q})$  d'après la proposition 6.11. On considère le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
E_{\infty}^{0,2}(\pi) & \xrightarrow{\rho_{\infty}} & \prod_{b \in B} H^2(F_b; \mathcal{Q}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
(6.5.4) \quad 0 \longrightarrow E_{\infty}^{0,2}(\pi_{n+1}) & \xrightarrow{\rho_{\infty}^{n+1}} & \prod_{b \in B} H^2((W_{n+1})_b; \mathcal{Q})
\end{array}$$

où  $\rho_{\infty}^{n+1}$  est injectif d'après le lemme 6.4.

Soit  $\nu \in H^2(M, B; \mathcal{Q})$  une classe telle que  $\rho(\nu) = 0$ . La restriction  $\nu_{n+1}$  de  $\nu$  à  $W_{n+1}$  se projette sur une classe de  $E_{\infty}^{0,2}(\pi_{n+1})$  dont l'image par  $\rho_{\infty}^{n+1}$  est nulle d'après le diagramme (6.5.4). Puisque  $\rho_{\infty}^{n+1}$  est injectif, la projection de  $\nu_{n+1}$  dans  $E_{\infty}^{0,2}(\pi_{n+1})$  est nulle. La classe  $\nu_{n+1}$  se remonte donc en une classe dans  $E_{\infty}^{1,1}(\pi_{n+1})$  d'après le diagramme (6.5.3). L'annulation du morphisme de restriction  $E_{\infty}^{1,1}(\pi_{n+1}) \rightarrow E_{\infty}^{1,1}(\pi_n)$  implique que la restriction  $\nu_n$  de  $\nu$  à  $W_n$  est nulle. En résumé, la classe  $\nu$  appartient au noyau du morphisme de restriction  $\{r_n\}$ . Or, d'après le corollaire 6.10, ce morphisme est injectif et donc  $\nu = 0$ .  $\square$

Le corollaire 6.10 et la proposition 6.12 démontrent donc le théorème 6.1. On finit par une généralisation de ce théorème en degré arbitraire.

## 6.6 Cohomologie des submersions

Soient  $\pi: M \rightarrow B$  une submersion surjective,  $\mathcal{Q}_0$  un faisceau de base  $B$  et  $\mathcal{Q}$  le faisceau image réciproque  $\pi^*\mathcal{Q}_0$ . Pour étendre le théorème 6.1 en degré plus grand, on remplace la section globale par une famille de sections locales

définies sur les adhérences des ouverts d'un recouvrement relativement compact et localement fini de  $B$ . On construit alors un recouvrement fermé croissant  $\{W_n\}$  de  $M$  tel que

i)  $W_n$  est un tube de la famille de sections locales et  $\pi_n: W_n \rightarrow B$  est une application propre à fibres connexes;

ii) le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} E_2^{1,0}(\pi_{n+1}) = H^1(B; \mathcal{Q}_0) & \xrightarrow{\pi_{n+1}^*} & H^1(W_{n+1}; \mathcal{Q}) & \longrightarrow & E_\infty^{0,1}(\pi_{n+1}) \\ \parallel & & \downarrow & & \downarrow 0 \\ E_2^{1,0}(\pi_n) = H^1(B; \mathcal{Q}_0) & \xrightarrow{\pi_n^*} & H^1(W_n; \mathcal{Q}) & \longrightarrow & E_\infty^{0,1}(\pi_n) \end{array}$$

De façon précise, on obtient le théorème suivant:

**Théorème 6.13** *Si les fibres  $F_b$  sont connexes et  $H^q(F_b; \mathbb{Z}) = 0$  en degré  $q < r$ , alors*

i)  $\pi^*: H^q(B; \mathcal{Q}_0) \rightarrow H^q(M; \mathcal{Q})$  est isomorphisme en degré  $q < r$ ;

ii) la suite

$$0 \rightarrow H^r(B; \mathcal{Q}_0) \xrightarrow{\pi^*} H^r(M; \mathcal{Q}) \xrightarrow{\rho} \prod_{b \in B} H^r(F_b; \mathcal{Q})$$

est exacte.  $\square$

Soit  $\mathcal{F}$  le feuilletage défini par la submersion  $\pi: M \rightarrow B$ . Soit  $\phi^p$  le faisceau des germes de p-formes basiques. D'après [24], on sait que  $H^q(M; \phi^p) \cong E_1^{p,q}(\mathcal{F})$ . On a alors le corollaire suivant qui généralise le résultat de cohomologie feuilletée de [7]:

**Corollaire 6.14** *Si les fibres  $F_b$  sont connexes et les groupes de cohomologie de De Rham  $H^q(F_b) = 0$  en degré  $q < r$ , alors on a*

$$E_1^{p,q}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \Omega^p(B) & \text{pour } q = 0 \\ 0 & \text{pour } q < r \end{cases} \quad \square$$

## References

- [1] Alcalde Cuesta F., Groupoïde d'homotopie d'un feuilletage riemannien et réalisation symplectique de certaines variétés de Poisson. *Publicacions Matemàtiques*, **33** (1989), 395-410.

- [2] Almeida R., Molino P., Suites d'Atiyah, feuilletages et quantification. *Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et Topologie Différentielle*, Université de Montpellier, 1984-1985.
- [3] Bott R., Tu L.W., *Differential Forms in Algebraic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [4] Coste A., Dazord P., Weinstein A., Groupoïdes symplectiques. *Publ. Dépt. Math. Lyon*, **2/A** (1987), 1-62.
- [5] Dazord P., Réalisations Isotropes de Libermann. Travaux du S.S.R.G., *Publ. Dépt. Math. Lyon*, **4/B** (1988), 1-49.
- [6] Dazord P., Groupoïdes symplectiques et Troisième Théorème de Lie. *Springer L.N.M.*, **1416** (1990), 39-74.
- [7] Dazord P., Hector G., Intégration symplectique des variétés de Poisson totalement asphériques. Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie à Berkeley, *Springer Math. Sc. Res. Inst. Publ.*, **20** (1991), 37-72.
- [8] Dazord P., Molino P.,  $\Gamma$ -structures Poissonniennes et feuilletages de Libermann. Travaux du S.S.R.G., *Publ. Dépt. Math. Lyon*, **1/B** (1988), 69-89.
- [9] Godement R., *Théorie des Faisceaux*. Hermann, Paris, 1953.
- [10] Haefliger A., Groupoïdes d'holonomie et classifiants. Structures Transverses des Feuilletages, *Astérisque*, **116** (1984), 70-97.
- [11] Hector G., Une nouvelle obstruction à l'intégrabilité des variétés de Poisson régulières. *Hokkaido Math. J.*, **21** (1992), 159-185.
- [12] Higgins P.J., Mackenzie K.C.H., Fibrations and quotients of differentiable groupoids. *J. London Math. Soc.*, **42** (1990), 101-110.
- [13] Karasev M.V., Analogues of the objects of Lie group theory for non-linear Poisson brackets. *Math. USSR Izvestiya*, **28** (1987), 497-527.
- [14] Kobayashi S., Principal fibre bundles with the 1-dimensional toroidal group. *Tôhoku Math. J.*, **8** (1956), 29-45.
- [15] Kostant B., *Quantization and unitary representations*. Springer L.N.M.170, Berlin, 1970.
- [16] Libermann P., Sur les automorphismes infinitésimaux des structures symplectiques et des structures de contact. *Colloque Bruxelles 1958*, Gauthier Villars, Paris, 1959.
- [17] Mackenzie K., *Lie groupoids and Lie algebroids in Differential Geometry*. London Math. Soc. Lecture Note Series 124, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

- [18] Molino P., *Riemannian Foliations*. Progress in Math. 73, Birkhäuser, Boston, 1988.
- [19] Phillips J., The holonomic imperative and the homotopy groupoid of a foliated manifold. *Rocky Mountains J. of Math.*, **17** (1987), 151-165.
- [20] Pradines J., Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables. Relations entre propriétés locales et globales. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **263** (1966), 907-910.
- [21] Pradines J., Quotients de groupoïdes différentiables. *C. R. Acad. Sc. Paris*, **303** (1986), 817-820.
- [22] Serre J. P., *Lie algebras and Lie groups*. Benjamin, New York, 1965.
- [23] Souriau J.M., *Structure des systèmes dynamiques*. Dunod, Paris, 1970.
- [24] Vaisman I., *Cohomology and Differential Forms*. Marcel Dekker, New York, 1973.
- [25] Van Est W.T., Groupe locaux analytiques et abstraits. *Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et Topologie*, Université de Montpellier, 1987.
- [26] Weil A., *Variétés Kähleriennes*, Hermann, Paris, 1958.
- [27] Weinstein A., The local structure of Poisson manifolds. *J. Diff. Geometry*, **18** (1983), 523-557.
- [28] Weinstein A., Symplectic groupoids and Poisson manifolds. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **16** (1988), 101-103.
- [29] Weinstein A., Coisotropic calculus and Poisson groupoids. *J. Math. Soc. Japan*, **40** (1988), 705-727.
- [30] Weinstein A., Symplectic groupoids, geometric quantization and irrational rotation algebras. Séminaire Sud-Rhodanien de Géométrie à Berkeley, *Springer Math. Sc. Res. Inst. Publ.*, **20** (1991), 281-290.
- [31] Weinstein A., Xu P., Extensions of symplectic groupoids and quantization. *J. reine angew. Math.*, **417** (1991), 159-189.

Fernando Alcalde Cuesta  
 Departamento de Xeometria e Topoloxia  
 Universidade de Santiago de Compostela  
 15706 Santiago de Compostela (Espane)  
 e-mail: alcalde@aimat.cesga.es

Gilbert Hector  
Laboratoire de Géométrie et Analyse – U.R.A. 746  
Université Claude Bernard-Lyon 1  
69622 Villeurbanne (France)  
e-mail: [hector@geometrie.univ-lyon1.fr](mailto:hector@geometrie.univ-lyon1.fr)